

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И. И. МЕЧНИКОВА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ
Кафедра оптимального управления и экономической кибернетики

А. В. Арсирый, О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник

Многозначный анализ и линейные задачи управления

*Методические указания и варианты контрольных работ
для студентов 3 – 6 курсов*

Одесса
«Астропринт»
2008

Методические указания и варианты контрольных работ по спецкурсу “Многозначный анализ и линейные задачи управления” предназначены для студентов 3 – 6 курсов математических специальностей.

Рецензенты: А. В. Плотников, д. ф.-м. н., профессор,
А. В. Усов, д. т. н., профессор

Рекомендовано к печати Ученым советом ИМЭМ ОНУ имени И. И. Мечникова.
Протокол № 3 от 5 февраля 2008 г.

© А. В. Арсирый, О. Д. Кичмаренко,
Н. В. Скрипник, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Литература	4
Пространства $comp(\mathbb{R}^n)$ и $conv(\mathbb{R}^n)$	5
Опорная функция и ее основные свойства	14
Мнозначные отображения. Интеграл Ауманна	20
Линейная задача быстрогодействия. Принцип максимума Понтрягина	26
Контрольная работа № 1	51
Контрольная работа № 2	62
Контрольная работа № 3	70
Контрольная работа № 4	71

ЛИТЕРАТУРА

1. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М.:Высш.шк., 2001. – 239 с.
2. Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. – М.:Изд-во МГУ, 1978. – 94 с.
3. Благодатских В.И. Теория дифференциальных включений. – М.:Изд-во МГУ, 1979.
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. – М.: КомКнига, 2005. – 216 с.
5. Ляпунов А. А. О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1940. – № 6. – С. 465 – 478.
6. Половинкин Е.С. Теория многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1983.
7. Филатов О.П. Лекции по многозначному анализу и дифференциальным включениям.- Самара: Изд-во “Самарский университет”, 2000. – 116 с.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
9. Aumann R.J. Integrals of set - valued functions // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – Vol.12, № 1. – P.1 – 12.

ПРОСТРАНСТВА $comp(\mathbb{R}^n)$ И $conv(\mathbb{R}^n)$

Пусть \mathbb{R}^n - n - мерное евклидово векторное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Пространство \mathbb{R}^n является линейным пространством с обычными операциями сложения векторов, умножения вектора на число и скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, а также нормированным пространством с нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Рассмотрим пространство $comp(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства \mathbb{R}^n .

Определение 1. Алгебраической суммой или просто суммой двух множеств F и G из пространства $comp(\mathbb{R}^n)$ называется множество

$$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}.$$

Сумма $F + G$ двух множеств F и G из пространства $comp(\mathbb{R}^n)$ является также элементом пространства $comp(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если множества F, G выпуклы, то их алгебраическая сумма $F + G$ также будет выпуклым множеством.

Если множество F состоит из единственной точки, то есть $F = \{f\}$, то множество $\{f\} + G$ получается параллельным сдвигом множества G на вектор $\{f\}$.

Пусть $S_r(a)$ – шар радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то есть

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

Тогда

$$S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) = S_{r_1+r_2}(a_1+a_2),$$

то есть при сложении двух шаров их радиусы суммируются и векторы, задающие центры шаров, также суммируются.

Из этой формулы при $r_1 = r, r_2 = 0, a_1 = 0, a_2 = a$ получаем, что

$$S_r(a) = S_r(0) + \{a\}. \quad (1)$$

Операция алгебраической суммы для любых множеств $F, G, H \in comp(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) коммутативности $F + G = G + F$;
- 2) ассоциативности $F + (G + H) = (F + G) + H$;
- 3) существует нулевой элемент $\{0\} : F + \{0\} = F$.

Следует отметить, что если множество F состоит более чем из одной точки, то у такого множества нет обратного элемента относительно введенной операции суммы множеств, то есть не существует такого множества $-F \in comp(\mathbb{R}^n)$, что $F + (-F) = \{0\}$. Если же $F = \{f\}$, то $-F = \{-f\}$.

Пример 1. Найти сумму H множеств F и G , заданных аналитически или изображенных на рисунке:

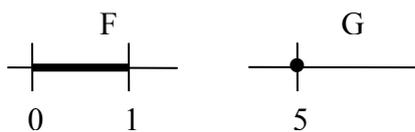
- 1) Пусть $F = \{1, 2\}, G = \{0, 5\}$. Тогда по определению суммы множеств

$$H = \{1+0, 2+0, 1+5, 2+5\} = \{1, 2, 6, 7\}.$$

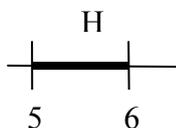
- 2) Пусть $F = \{1, 2, 3\}, G = \{5, 6, 7\}$. Тогда по определению суммы множеств

$$H = \{1+5, 2+5, 3+5, 1+6, 2+6, 3+6, 1+7, 2+7, 3+7\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

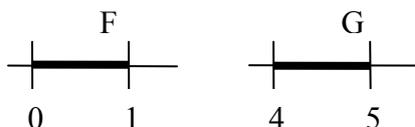
- 3) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



Так как множество G одноточечное, то множество H получается из множества F параллельным сдвигом на 5 единиц вправо:

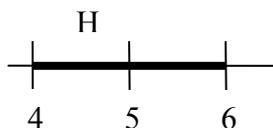


4) Пусть множества F и G изображены на рисунке:

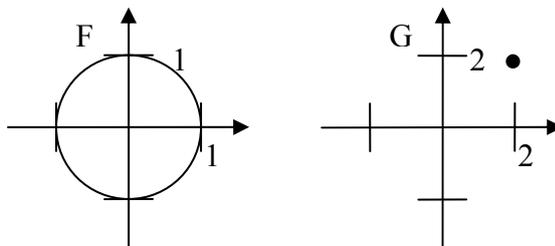


Для любых элементов $f \in F, g \in G$ справедливы неравенства $0 \leq f \leq 1, 4 \leq g \leq 5$. Тогда сумма $f + g$ удовлетворяет неравенству $4 \leq f + g \leq 6$. Таким образом, $H \subset [4, 6]$.

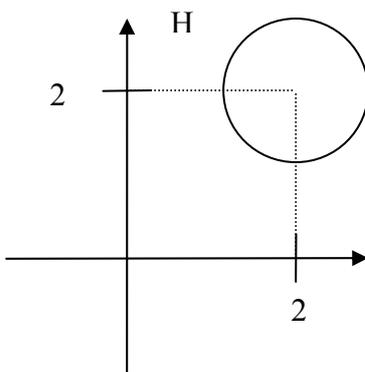
Кроме того, для любого элемента $x \in [4, 6]$ существуют элементы $f \in F$ и $g \in G$ такие, что $x = f + g$, например $f = 0, g = x$ при $x \in [4, 5]$ и $f = 1, g = x - 1$ при $x \in (5, 6]$. Следовательно, $[4, 6] \subset H$. Окончательно множество H имеет вид:



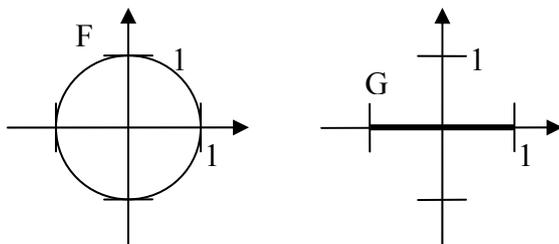
5) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



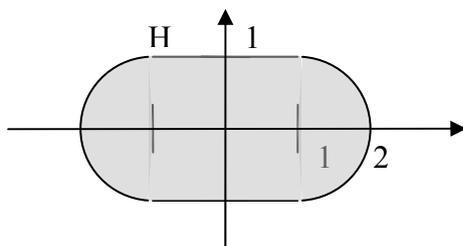
Так как множество G одноточечное, то множество H получается из множества F параллельным переносом на вектор $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:



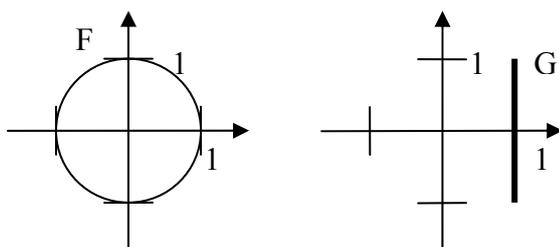
6) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



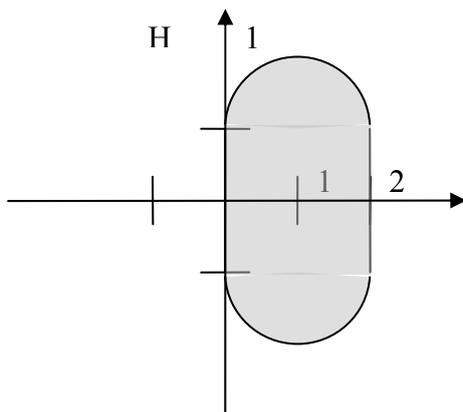
Для любой точки $g \in G$ множество $F + \{g\}$ получается из множества F параллельным сдвигом на вектор g , то есть представляет собой окружность единичного радиуса с центром в точке g . Когда элемент g “пробегают” множество G , окружность $F + \{g\}$ “движется” параллельно оси x_1 , в результате образуя выпуклое множество, изображенное на рисунке:



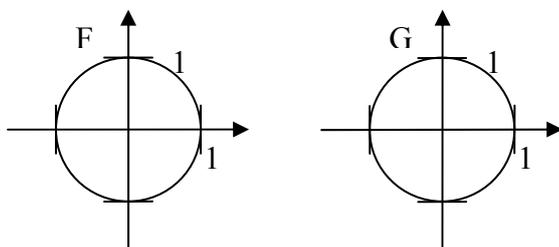
7) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



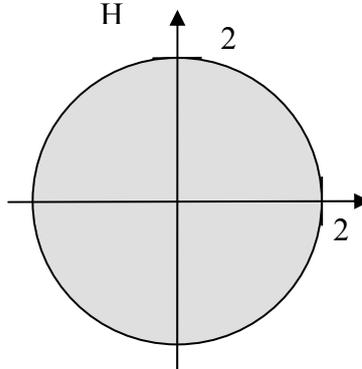
Аналогично предыдущему примеру получаем:



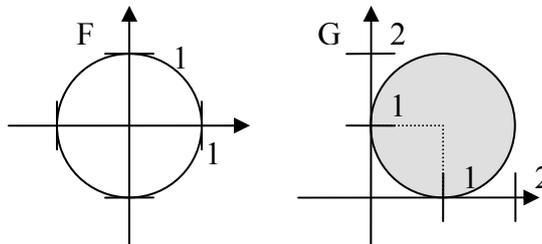
8) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



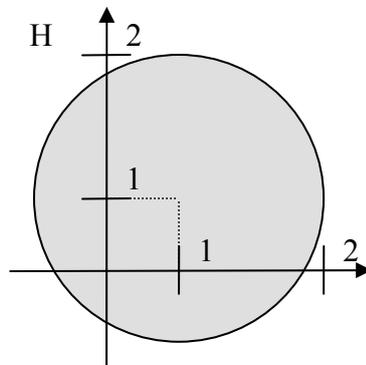
Для любой точки $g \in G$ множество $F + \{g\}$ получается из множества F параллельным сдвигом на вектор g , то есть представляет собой окружность единичного радиуса с центром в точке g . Когда элемент g “пробегаёт” множество G , центр окружности $F + \{g\}$ движется по единичной окружности G , в результате получаем выпуклое множество $S_2(0)$, изображенное на рисунке:



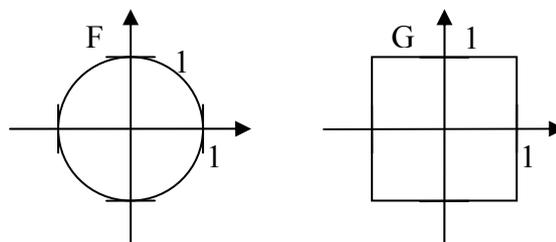
9) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



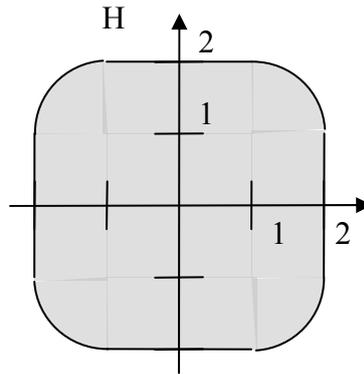
Аналогично предыдущему примеру получаем:



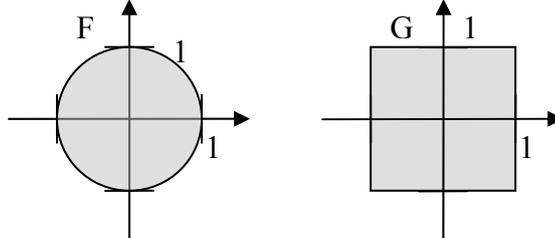
10) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



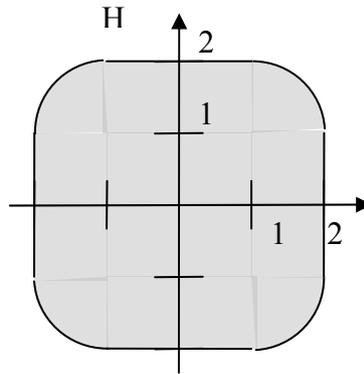
Тогда аналогично предыдущему их сумма имеет вид:



11) Пусть множества F и G изображены на рисунке:



Тогда аналогично предыдущему их сумма имеет вид:



Определение 2. Произведением множества $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется множество

$$G = \lambda F = \{g = \lambda f : f \in F\} /$$

Произведение множества $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ на произвольное число λ является элементом пространства $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если множество F выпуклое, то и множество G также выпуклое.

При умножении шара радиуса $r \geq 0$ с центром в a на число λ радиус шара умножается на $|\lambda|$, а центр – на λ , то есть

$$\lambda S_r(a) = S_{|\lambda|r}(\lambda a). \quad (2)$$

Таким образом, учитывая формулу (1), имеем

$$S_r(a) = \{a\} + rS_1(0). \quad (3)$$

Непосредственно проверяется, что для любых чисел α, β и любых двух множеств $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ выполняются следующие свойства:

- 1) $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F$;
- 2) $1 \cdot F = F$;
- 3) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$.

Пространство $comp(\mathbb{R}^n)$ не является линейным пространством с введенными операциями алгебраической суммы двух множеств и умножения множества на число хотя бы потому, что не у каждого элемента $F \in comp(\mathbb{R}^n)$ есть обратный элемент $-F$. Кроме того, не всегда выполняется необходимый для линейности закон дистрибутивности, то есть не всегда выполняется равенство:

$$(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F. \quad (4)$$

Вместо равенства в формуле (4) справедливо лишь одностороннее включение

$$(\alpha + \beta)F \subset \alpha F + \beta F.$$

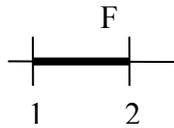
Если $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и множество F выпукло, то формула (4) справедлива.

Пример 2. Найти произведение G множества F на скаляр λ :

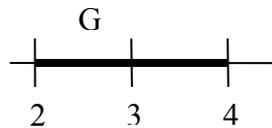
1) Пусть $F = \{1, 5\}$, $\lambda = 2$. Тогда

$$G = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 5\} = \{2, 10\}.$$

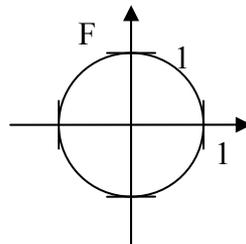
2) Пусть $\lambda = 2$, множество F изображено на рисунке:



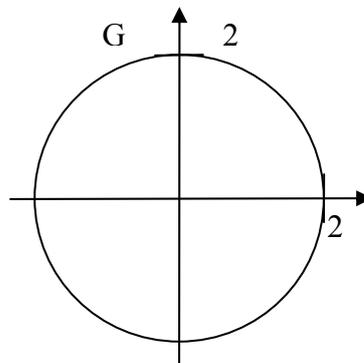
Тогда для любого элемента $f \in F$ справедливо неравенство $1 \leq f \leq 2$, а значит для любого элемента $g \in G$ справедливо неравенство $2 \leq g \leq 4$, то есть $G \subset [2, 4]$. Кроме того, для любого элемента $x \in [2, 4]$ найдется элемент $f = \frac{1}{2}x \in F$ такой, что $x = \lambda f$, то есть $[2, 4] \subset G$. Окончательно получаем, что множество G имеет вид:



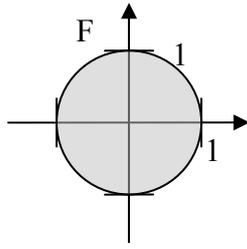
3) Пусть $\lambda = 2$, множество F – единичная сфера в пространстве \mathbb{R}^2 :



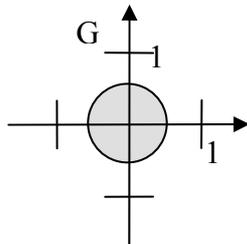
Тогда в силу определения 2 множество G – сфера радиуса 2 с центром в начале координат:



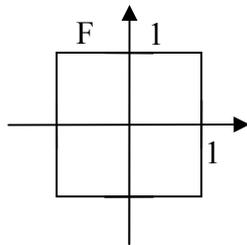
4) Пусть $\lambda = \frac{1}{2}$, F – единичный шар в пространстве \mathbb{R}^2 :



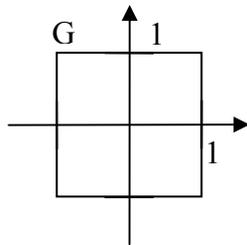
Тогда в силу (2) множество G – шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в начале координат:



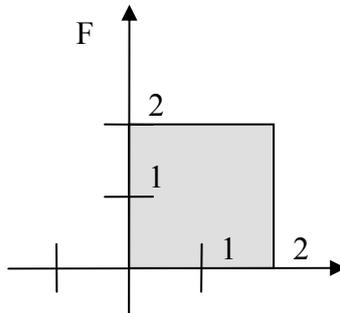
5) Пусть F – единичный квадрат, $\lambda = -1$:



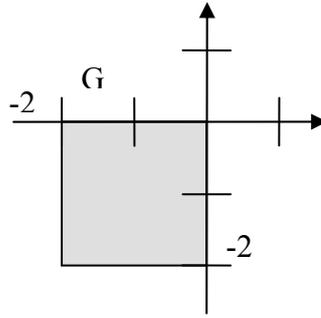
Тогда в силу определения 2 любому элементу $f \in F$ соответствует элемент $-f \in G$, то есть множество G симметрично множеству F относительно начала координат. В данном примере $G = F$:



6) Пусть $\lambda = -1$, множество F изображено на рисунке:



Аналогично предыдущему примеру множество G симметрично множеству F относительно начала координат:



Рассмотрим подпространство $conv(\mathbb{R}^n)$ пространства $comp(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства \mathbb{R}^n . Приведенные выше свойства операций алгебраической суммы множеств и умножения множества на число показывают, что если рассматривать умножение выпуклых множеств только на неотрицательные числа, то для пространства $conv(\mathbb{R}^n)$ справедливы все аксиомы линейности, кроме аксиомы существования обратного элемента.

Пусть $F \in comp(\mathbb{R}^n)$ и в пространстве \mathbb{R}^n задано линейное преобразование с помощью матрицы A (с действительными элементами) порядка $n \times n$.

Определение 3. **Образом множества F при линейном преобразовании**, задаваемом матрицей A , называется множество

$$G = AF = \{g = Af : f \in F\}.$$

Легко проверить, что образ множества $F \in comp(\mathbb{R}^n)$ при линейном преобразовании также является элементом пространства $comp(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если множество F выпуклое, то и множество G также выпуклое.

Пример 3.

Пусть $n = 2$, $F = S_1(0)$ и матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что единичный шар $S_1(0)$ при таком линейном преобразовании перейдет в эллипс

$$AF = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{b} \right)^2 \leq 1 \right\},$$

если $a \neq 0, b \neq 0$, или в отрезок

$$AF = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, |x_2| \leq |b|\},$$

если $a = 0, b \neq 0$, или в отрезок

$$AF = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq |a|, x_2 = 0\},$$

если $a \neq 0, b = 0$, или в точку $AF = \{0\}$, если $a = 0, b = 0$.

В пространстве $comp(\mathbb{R}^n)$ можно ввести **метрику**, или **расстояние**, между двумя множествами F и G по формуле:

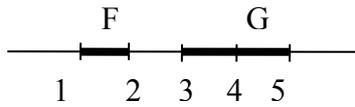
$$h(F, G) = \min \{r \geq 0 : F \subset G + S_r(0), G \subset F + S_r(0)\}.$$

Таким образом, расстоянием между двумя множествами является наименьшее из положительных чисел r , для которых выполняются одновременно два включения $F \subset G + S_r(0), G \subset F + S_r(0)$. Эта метрика называется **хаусдорфовой**.

Легко проверить, что $h(F, \{0\}) = |F|$, где $|F|$ – модуль множества $F \in comp(\mathbb{R}^n)$.

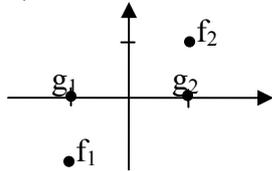
Пример 4. Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G, изображенными на рисунке:

1)



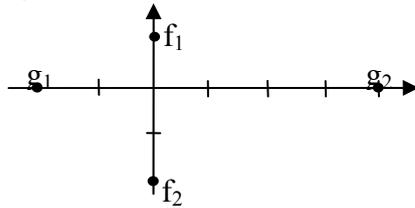
Используя определение расстояние по Хаусдорфу и рассмотренные примеры нахождения суммы множеств, получаем, что $F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq 2$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq 3$. Таким образом, $h(F, G) = 3$.

2)



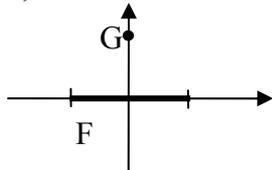
$F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq 1$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq 1$. Таким образом, $h(F, G) = 1$.

3)



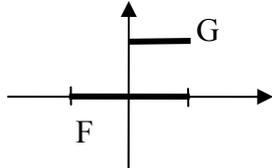
$F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$. Таким образом, $h(F, G) = \sqrt{17}$.

4)



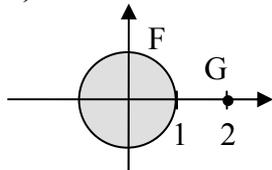
$F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq \sqrt{2}$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq 1$. Таким образом, $h(F, G) = \sqrt{2}$.

5)



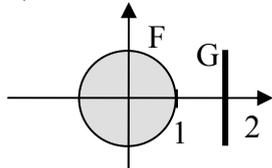
$F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq \sqrt{2}$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq 1$. Таким образом, $h(F, G) = \sqrt{2}$.

6)



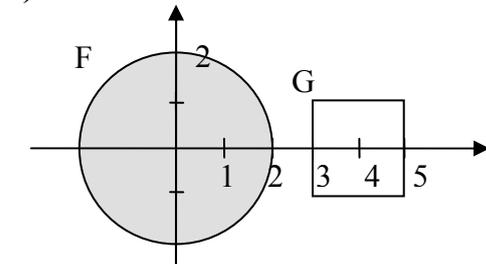
$F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq 3$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq 1$. Таким образом, $h(F, G) = 3$.

7)



$F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq 3$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq \sqrt{5} - 1$. Таким образом, $h(F, G) = 3$.

8)



$F \subset G + S_r(0)$ при $r \geq 5$, $G \subset F + S_r(0)$ при $r \geq \sqrt{26} - 2$. Таким образом, $h(F, G) = 5$.

ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Определение 4. Пусть задано некоторое множество $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. **Опорной функцией** множества F называется скалярная функция $c(F, \psi)$ векторного аргумента $\psi \in \mathbb{R}^n$, определяемая условием

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi). \quad (5)$$

Множество F также считается одним из аргументов функции $c(F, \psi)$. Зафиксируем множество F . Функция $c(F, \psi)$ как функция аргумента ψ отображает пространство \mathbb{R}^n в числовую ось \mathbb{R} . Максимум в правой части равенства (5) достигается, так как скалярное произведение (f, ψ) непрерывно по f , а множество F компактно.

Пусть $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$ – некоторый фиксированный вектор, а f_0 – один из векторов множества F , на котором достигается максимум в определении опорной функции (5) для вектора $\psi = \psi_0$, то есть выполняется равенство

$$(f_0, \psi_0) = \max_{f \in F} (f, \psi_0) = c(F, \psi_0). \quad (6)$$

В этом случае вектор ψ_0 – называется **опорным вектором** к множеству F в точке f_0 , а совокупность $U(F, \psi_0)$ всех векторов $f_0 \in F$, удовлетворяющих равенству (6), называется **опорным множеством** к множеству F в направлении вектора ψ_0 . Гиперплоскость Γ_{ψ_0} в пространстве \mathbb{R}^n , определяемая соотношением

$$\Gamma_{\psi_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \psi_0) = (f_0, \psi_0)\},$$

называется **опорной гиперплоскостью** к множеству F в направлении вектора ψ_0 .

Для опорного множества $U(F, \psi_0)$ справедливо представление $U(F, \psi_0) = F \cap \Gamma_{\psi_0}$.

Гиперплоскость Γ_{ψ_0} разбивает все пространство \mathbb{R}^n на два полупространства \mathbb{R}^+ и \mathbb{R}^- . Множество F лежит в отрицательном полупространстве \mathbb{R}^- относительно вектора ψ_0 , так как для всех точек $f \in F$ выполняется неравенство $(f, \psi_0) \leq (f_0, \psi_0)$.

Свойства опорных функций

1. Опорная функция $c(F, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородна, то есть

$$c(F, \lambda \psi) = \lambda c(F, \psi)$$

для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $\lambda \geq 0$. В частности, $c(F, 0) = 0$.

2. Для любых двух векторов $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ опорная функция удовлетворяет неравенству

$$c(F, \psi_1 + \psi_2) \leq c(F, \psi_1) + c(F, \psi_2).$$

Следствие 1. Опорная функция $c(F, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой.

3. Пусть $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Тогда опорная функция $c(F + G, \psi)$ суммы $F + G$ равняется сумме двух опорных функций $c(F, \psi)$ и $c(G, \psi)$, то есть

$$c(F + G, \psi) = c(F, \psi) + c(G, \psi).$$

4. Пусть A - матрица порядка $n \times n$, а $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$c(AF, \psi) = c(F, A^T \psi),$$

где A^T – матрица, транспонированная к матрице A .

5. Пусть $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$c(\lambda F, \psi) = c(F, \lambda \psi).$$

Следствие 2. Опорная функция $c(F, \psi)$ положительно однородна по первому аргументу F , то есть $c(\lambda F, \psi) = \lambda c(F, \psi)$ для любого числа $\lambda \geq 0$.

6. Пусть $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Если выполняется включение $G \subset F$, то для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$c(G, \psi) \leq c(F, \psi).$$

Следствие 3. Пусть $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Если точка f принадлежит множеству F , то для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $(f, \psi) \leq c(F, \psi)$.

7. Пусть $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Тогда опорные функции множеств $\text{co}F$ и F совпадают, то есть

$$c(\text{co}F, \psi) = c(F, \psi).$$

8. Пусть заданы множество $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и его опорная функция $c(F, \psi)$. Тогда выпуклая оболочка $\text{co}F$ множества F представляется в виде

$$\text{co}F = \bigcap_{\psi \in S} \{ f \in \mathbb{R}^n : (f, \psi) \leq c(F, \psi) \}.$$

Здесь и далее S – единичная сфера с центром в начале координат.

9. Пусть $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathbb{R}^n$. Если для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$(f, \psi) \leq c(F, \psi), \quad (7)$$

то точка f принадлежит выпуклой оболочке $\text{co}F$ множества F .

Следствие 4. Пусть множество $F \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. В таком случае точка f принадлежит множеству F тогда и только тогда, когда неравенство (7) выполняется для любого вектора $\psi \in S$.

10. Пусть $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Если для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$c(G, \psi) \leq c(F, \psi), \quad (8)$$

то справедливо включение $G \subset \text{co}F$.

Следствие 5. Пусть $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество F выпукло. Тогда включение $G \subset F$ справедливо тогда и только тогда, когда для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство (8).

11. Пусть $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Если множества F и G равны, то их опорные функции совпадают. Наоборот, если их опорные функции совпадают, то $\text{co}G = \text{co}F$.

Следствие 6. Множества $F, G \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ равны тогда и только тогда, когда их опорные функции совпадают. Таким образом, множество $F \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ можно однозначно восстановить по его опорной функции $c(F, \psi)$.

12. Пусть $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Если множества F и G пересекаются, то есть $F \cap G \neq \emptyset$, то для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$c(F, \psi) + c(G, -\psi) \geq 0. \quad (9)$$

Наоборот, если выполняется соотношение (9) для любого вектора $\psi \in S$, то $\text{co}F \cap \text{co}G \neq \emptyset$.

Следствие 7. Два множества $F, G \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ пересекаются тогда и только тогда, когда неравенство (9) выполняется для любого вектора $\psi \in S$.

13. Опорная функция для любых двух множеств $F, F_0 \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и любых двух векторов $\psi, \psi_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет неравенству

$$|c(F, \psi) - c(F_0, \psi_0)| \leq \|\psi_0\| h(F, F_0) + \|F_0\| \cdot \|\psi - \psi_0\| + 2h(F, F_0) \|\psi - \psi_0\|.$$

Следствие 8. Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по совокупности переменных F, ψ в любой точке (F_0, ψ_0) и, следовательно, непрерывна по каждой из переменных F, ψ в отдельности.

14. Пусть $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Если точка f является внутренней точкой множества F , то для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$(f, \psi) < c(F, \psi). \quad (10)$$

Наоборот, если соотношение (10) выполняется для любого вектора $\psi \in S$, то $f \in \text{int } co F$.

Следствие 9. Точка f принадлежит внутренности множества $F \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда неравенство (10) справедливо для любого вектора $\psi \in S$.

15. Пусть заданы два множества $F, G \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедливо соотношение

$$h(co F, co G) = \max_{\psi \in S} |c(F, \psi) - c(G, \psi)| \leq h(F, G). \quad (11)$$

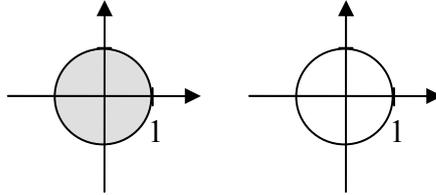
Следствие 10. Для множеств $F, G \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$h(F, G) = \max_{\psi \in S} |c(F, \psi) - c(G, \psi)|.$$

Заметим, что если множества F, G не являются выпуклыми, то в формуле (11) может быть строгое неравенство.

Пример 5.

1) Найти опорные функции единичного шара и единичной сферы в пространстве \mathbb{R}^2 :



По определению опорной функции для единичного шара имеем:

$$c(S_1(0), \psi) = \max_{f \in S_1(0)} (f, \psi) = \|\psi\| \max_{\|f\| \leq 1} \left(f, \frac{\psi}{\|\psi\|} \right).$$

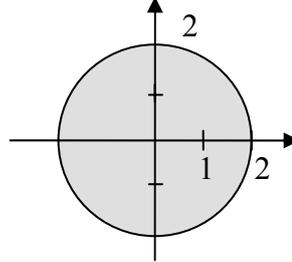
Так как максимум скалярного произведения достигается в случае, когда векторы сонаправлены и $\|f\|=1$, то $f = \frac{\psi}{\|\psi\|}$, тогда

$$c(S_1(0), \psi) = \|\psi\| \left\| \left(\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\psi}{\|\psi\|} \right) \right\| = \|\psi\|. \quad (12)$$

Тогда опорная функция единичной сферы S в силу свойства 7 опорных функций совпадает с опорной функцией своей выпуклой оболочки $S_1(0)$, то есть

$$c(S, \psi) = \|\psi\|.$$

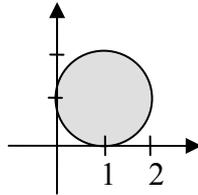
- 2) Найти опорную функцию шара радиуса 2 с центром в начале координат:



В силу следствия из свойства 5 опорных функций и формул (2), (12) получаем:

$$c(S_2(0), \psi) = c(2S_1(0), \psi) = 2c(S_1(0), \psi) = 2\|\psi\|.$$

- 3) Найти опорную функцию шара радиуса 1 с центром в точке $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:



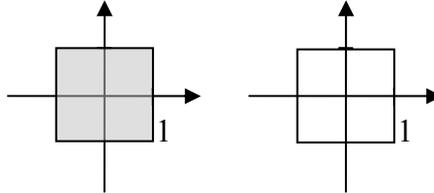
В силу представления (3) и свойства 3 опорных функций имеем

$$c\left(S_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \psi\right) = c\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + S_1(0), \psi\right) = c\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \psi\right) + c(S_1(0), \psi) = \psi_1 + \psi_2 + \|\psi\|.$$

В общем случае опорная функция шара $S_r(a)$ имеет вид

$$c(S_r(a), \psi) = (a, \psi) + r\|\psi\|. \quad (13)$$

- 4) Найти опорную функцию единичного квадрата $K_1(0)$ и его границы:

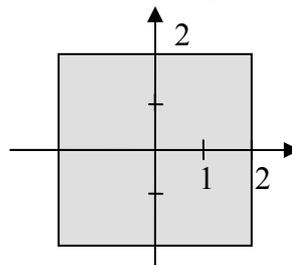


По определению опорной функции для единичного квадрата имеем

$$c(K_1(0), \psi) = \max_{f \in K_1(0)} (f, \psi) = \max_{f \in K_1(0)} (f_1\psi_1 + f_2\psi_2) = \begin{cases} \psi_1 + \psi_2, & \psi_1 \geq 0, \psi_2 \geq 0; \\ \psi_1 - \psi_2, & \psi_1 \geq 0, \psi_2 < 0; \\ -\psi_1 + \psi_2, & \psi_1 < 0, \psi_2 \geq 0; \\ -\psi_1 - \psi_2, & \psi_1 < 0, \psi_2 < 0 \end{cases} = |\psi_1| + |\psi_2|.$$

Тогда опорная функция границы единичного квадрата в силу свойства 7 опорных функций совпадает с опорной функцией своей выпуклой оболочки $K_1(0)$.

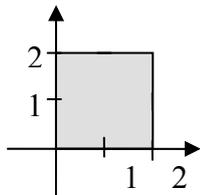
- 5) Найти опорную функцию множества F , изображенного на рисунке



В силу следствия из свойства 5 опорных функций и результатов, полученных в предыдущем примере, имеем

$$c(F, \psi) = c(2K_1(0), \psi) = 2c(K_1(0), \psi) = 2|\psi_1| + 2|\psi_2|.$$

6) Найти опорную функцию множества F , изображенного на рисунке



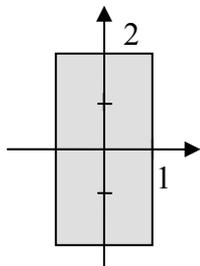
В силу свойства 3 опорной функции и результатов примера 4 имеем

$$c(F, \psi) = c\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + K_1(0), \psi\right) = c\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \psi\right) + c(K_1(0), \psi) = \psi_1 + \psi_2 + |\psi_1| + |\psi_2|.$$

В общем случае опорная функция параллелепипеда (а также его границы) с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ и полусторонами r_1, \dots, r_n имеет вид

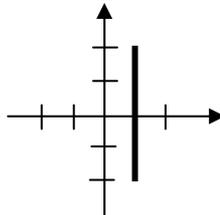
$$c(K_{r_1, \dots, r_n}(a), \psi) = (a, \psi) + \sum_{i=1}^n r_i |\psi_i|. \quad (14)$$

7) Найти опорную функцию множества F , изображенного на рисунке



В силу формулы (14) имеем $c(F, \psi) = |\psi_1| + 2|\psi_2|$.

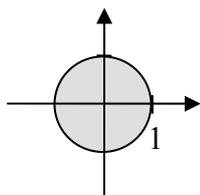
8) Найти опорную функцию множества F , изображенного на рисунке



Множество F представляет собой вырожденный прямоугольник с полусторонами 0 и 2 и центром в точке $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В силу формулы (14) его опорная функция имеет вид

$$c(F, \psi) = 1 \cdot \psi_1 + 0 \cdot \psi_2 + 0 \cdot |\psi_1| + 2|\psi_2| = \psi_1 + 2|\psi_2|.$$

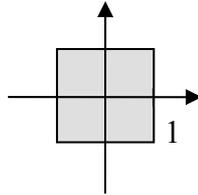
9) Найти опорную функцию множества MF , где матрица $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, а множество F изображено на рисунке:



В силу свойств 4 и 5 опорных функций и формулы (13) имеем

$$c(MF, \psi) = c(F, M^T \psi) = c\left(S_1(0), \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\right) = c(S_1(0), 5\psi) = 5c(S_1(0), \psi) = 5\|\psi\|.$$

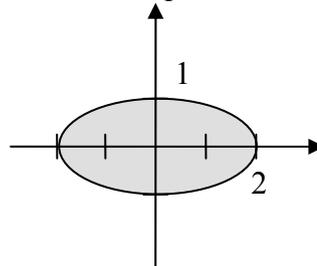
10) Найти опорную функцию множества MF , где матрица $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, а множество F изображено на рисунке:



В силу свойства 4 опорных функций и формулы (14) имеем

$$c(MF, \psi) = c(F, M^T \psi) = c\left(F, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\right) = c\left(F, \begin{pmatrix} 2\psi_1 + \psi_2 \\ -\psi_1 + 5\psi_2 \end{pmatrix}\right) = |2\psi_1 + \psi_2| + |-\psi_1 + 5\psi_2|.$$

11) Найти опорную функцию множества, изображенного на рисунке



Данное множество является эллипсом с полуосями 2 и 1, а значит представимо в виде $F = AS_1(0)$, где матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда в силу свойства 4 опорных функций и формулы (13) имеем

$$c(F, \psi) = c(AS_1(0), \psi) = c(S_1(0), A^T \psi) = c\left(S_1(0), \begin{pmatrix} 2\psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 2\psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4\psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ИНТЕГРАЛ АУМАННА

Определение 5. Многочначным отображением будем называть произвольное отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, то есть функцию, аргументом которой является время $t \in \mathbb{R}$, а значениями – элементы пространства $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, то есть непустые компактные множества из \mathbb{R}^n .

Так как пространства \mathbb{R} и $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ метрические, то можно говорить о непрерывности многочначного отображения.

Определение 6. Многочначное отображение $F(t)$ непрерывно в точке t_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех t , удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, справедливо неравенство $h(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$.

По определению расстояния по Хаусдорфу это означает, что многочначное отображение $F(t)$ непрерывно в точке t_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех t , удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, выполняются одновременно следующие два включения

$$F(t) \subset F(t_0) + S_\varepsilon(0), \quad F(t_0) \subset F(t) + S_\varepsilon(0).$$

В случае, когда выполняется лишь первое включение, многочначное отображение $F(t)$ называется полунепрерывным сверху в точке t_0 . Если же выполняется второе включение, то многочначное отображение $F(t)$ называется полунепрерывным снизу в точке t_0 . Таким образом, многочначное отображение $F(t)$ непрерывно в точке t_0 тогда и только тогда, когда оно полунепрерывно сверху и снизу в данной точке.

Определение 7. Многочначное отображение $F: I \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ назовем непрерывным на отрезке $I = [t_0, t_1]$, если оно непрерывно в каждой точке этого отрезка.

Теорема 1 [1]. Пусть $F: I \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ – непрерывное многочначное отображение. Тогда опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t при каждом фиксированном векторе $\psi \in \mathbb{R}^n$. Наоборот, если функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t при каждом фиксированном векторе $\psi \in S$, то многочначное отображение $coF(t)$ непрерывно.

Следствие 11. Многочначное отображение $F: I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно тогда и только тогда, когда опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t при каждом фиксированном векторе $\psi \in S$.

Определение 8. Многочначное отображение $F: I \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ назовем измеримым на отрезке I , если его опорная функция $c(F(t), \psi)$ измерима по t на отрезке I для каждого фиксированного вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Такое определение измеримости является очень общим, и широкий класс отображений $F(t)$ измерим в указанном смысле. Обычно в литературе по многочначным отображениям измеримость определяют для более узкого класса отображений $F(t)$. Поскольку по опорной функции $c(F(t), \psi)$ можно восстановить лишь выпуклую оболочку $coF(t)$, данное определение измеримости накладывает ограничение на поведение лишь многочначного отображения $coF: I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ и никак не отражает того, что происходит с той частью множества $F(t)$, которая лежит внутри $coF(t)$. Тем не менее все приводимые ниже ре-

зультаты справедливы для многозначных отображений $F(t)$, измеримых в указанном смысле.

Любое непрерывное многозначное отображение $F : I \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ измеримо, поскольку его опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t при каждом фиксированном $\psi \in \mathbb{R}^n$ и, следовательно, измерима.

Определение 9. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **однозначной ветвью** многозначного отображения $F : I \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, если при всех $t \in I$ выполняется включение $f(t) \in F(t)$.

Ясно, что однозначная ветвь $f(t)$ всегда существует, поскольку множество $F(t)$ непусто при всех $t \in I$.

Теорема 2 (теорема А.Ф.Филиппова) [1]. Если многозначное отображение $F : I \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ измеримо, то у него существует измеримая однозначная ветвь $f(t) \in F(t)$.

Пусть заданы отрезок времени $I = [t_0, t_1]$ и некоторое отображение $F : I \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 10 [9]. **Интегралом Ауманна** от многозначного отображения $F(t)$ на отрезке I называется множество

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt, f(t) \in F(t) \right\}. \quad (15)$$

Здесь в правой части интеграл Лебега берется по всем однозначным ветвям отображения $F(t)$, для которых он существует. Ясно, что G является подмножеством пространства \mathbb{R}^n .

Теорема 3 (теорема А.А.Ляпунова) [1,5]. Пусть многозначное отображение $F(t)$ измеримо на отрезке I и $|F(t)| \leq k(t)$, где $k(t)$ суммируема на I . Тогда интеграл от этого многозначного отображения является непустым выпуклым компактным множеством в пространстве \mathbb{R}^n , то есть $G \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 12. Пусть многозначное отображение $F(t)$ непрерывно на отрезке I . Тогда $G \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Пример 6. Рассмотрим многозначное отображение $F(t) = \{-t, t\}$, $t \in [0, 1]$. Найдем интеграл $G = \int_0^1 F(t) dt$.

Очевидно, что максимальное значение $g \in G$ равно $\frac{1}{2}$ и достигается на непрерывной однозначной ветви $f(t) = t$. Минимальное значение $g \in G$ равно $-\frac{1}{2}$ и достигается на непрерывной однозначной ветви $f(t) = -t$. Таким образом, $G \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Пусть g – произвольная точка отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Покажем, что существует однозначная ветвь $f(t)$ многозначного отображения $F(t)$ такая, что интеграл Лебега $\int_0^1 f(t) dt = g$. Такая ветвь будет уже разрывной, например,

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -t, & \tau < t \leq 1, \end{cases} \quad \tau = \sqrt{g + \frac{1}{2}}.$$

Действительно, функция $f(t)$ интегрируема по Лебегу и

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{\tau} t dt - \int_{\tau}^1 t dt = \frac{\tau^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\tau^2}{2} = \tau^2 - \frac{1}{2} = g.$$

Это означает, что $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset G$. Следовательно, $G = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Теорема 4 [1]. Пусть многозначное отображение $F(t)$ измеримо на отрезке I и $|F(t)| \leq k(t)$, где $k(t)$ суммируема на I . Тогда имеет место равенство

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt, \psi\right) = \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt. \quad (16)$$

Следствие 4. Пусть многозначное отображение $F(t)$ непрерывно на отрезке I . Тогда имеет место равенство (16).

С помощью данной теоремы можно довольно просто находить интегралы от многозначных отображений $F(t)$. Действительно, для этого достаточно в соответствии с формулой (16) построить опорную функцию $c(F(t), \psi)$, проинтегрировать уже однозначную функцию $c(F(t), \psi)$ по t при каждом векторе $\psi \in S$, а затем восстановить по полученной опорной функции непустое выпуклое компактное множество G . Заметим, что для восстановления выпуклого множества G достаточно подобрать такое множество H , чтобы его опорная функция $c(H, \psi)$ совпадала с $c(G, \psi)$. Тогда согласно следствию 6 из свойства 11 опорных функций $G = H$.

Пример 7. Найти интеграл от многозначного отображения $F(t) \equiv F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

В силу теоремы 4 имеем

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} F dt, \psi\right) = \int_{t_0}^{t_1} c(F, \psi) dt = (t_1 - t_0)c(F, \psi).$$

Такую же опорную функцию имеет выпуклое компактное множество $(t_1 - t_0)cF$, так как в силу свойств 5 и 7 опорной функции имеем

$$c((t_1 - t_0)cF, \psi) = (t_1 - t_0)c(cF, \psi) = (t_1 - t_0)c(F, \psi).$$

Таким образом,

$$\int_{t_0}^{t_1} F dt = (t_1 - t_0)cF. \quad (17)$$

Пример 8. Вычислить интеграл от многозначного отображения $S_{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Решение. Для построения множества $G = \int_0^{2\pi} S_{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$ найдем его опорную функцию, воспользовавшись теоремой 4:

$$\begin{aligned} c\left(\int_0^{2\pi} S_{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt, \psi\right) &= \int_0^{2\pi} c\left(S_{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \psi\right) dt = \int_0^{2\pi} (\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t + 2t \|\psi\|) dt = \\ &= \psi_1 (-\cos t) \Big|_0^{2\pi} + \psi_2 \sin t \Big|_0^{2\pi} + \|\psi\| t^2 \Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 \|\psi\|. \end{aligned}$$

Опорная функция шара $S_{4\pi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ также имеет вид $4\pi^2 \|\psi\|$, то есть опорные функции множеств G и $S_{4\pi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ совпадают. Следовательно, в силу следствия 6 из свойства 11 опорных функций $G = S_{4\pi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} S_{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = S_{4\pi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример 9. Вычислить интеграл от многозначного отображения $(1-t)S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ на отрезке $[0, 4]$.

Решение. Для построения множества $G = \int_0^4 (1-t)S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt$ найдем его опорную функцию, воспользовавшись теоремой 4:

$$\begin{aligned} c \left(\int_0^4 (1-t)S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt, \psi \right) &= \int_0^4 c \left((1-t)S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \psi \right) dt = \int_0^4 c \left(S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (1-t)\psi \right) dt = \\ &= \int_0^4 \left((1-t)\psi_1 + 2(1-t)\psi_2 + 2 \|(1-t)\psi\| \right) dt = \int_0^4 (1-t)(\psi_1 + 2\psi_2) dt + 2 \|\psi\| \left[\int_0^1 (1-t) dt + \int_t^4 (t-1) dt \right] = \\ &= (\psi_1 + 2\psi_2) \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_0^4 + \|\psi\| \left[(2t - t^2) \Big|_0^1 + (t^2 - 2t) \Big|_1^4 \right] = -4(\psi_1 + 2\psi_2) + 10 \|\psi\|. \end{aligned}$$

Опорная функция шара $S_{10} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ также имеет вид $-4\psi_1 - 8\psi_2 + 10 \|\psi\|$, то есть опорные функции множеств G и $S_{10} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ совпадают. Следовательно, в силу следствия 6 из свойства 11 опорных функций $G = S_{10} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\int_0^4 (1-t)S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = S_{10} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Пример 10. Вычислить интеграл от многозначного отображения $F(t) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -3t \leq x_1 \leq 5t, -2t \leq x_2 \leq 3t \right\}$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. Для построения множества $G = \int_0^\pi F(t) dt$ найдем его опорную функцию, воспользовавшись теоремой 4:

$$\begin{aligned} c \left(\int_0^\pi F(t) dt, \psi \right) &= \int_0^\pi c(F(t), \psi) dt = \int_0^\pi \left(t\psi_1 + \frac{1}{2}t\psi_2 + 4t|\psi_1| + \frac{5}{2}t|\psi_2| \right) dt = \\ &= \frac{\pi^2}{2}\psi_1 + \frac{\pi^2}{4}\psi_2 + 2\pi^2|\psi_1| + \frac{5\pi^2}{4}|\psi_2|. \end{aligned}$$

Опорная функция прямоугольника $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{3\pi^2}{2} \leq x_1 \leq \frac{5\pi^2}{2}, -\pi^2 \leq x_2 \leq \frac{3\pi^2}{2} \right\}$ также имеет вид $\frac{\pi^2}{2}\psi_1 + \frac{\pi^2}{4}\psi_2 + 2\pi^2|\psi_1| + \frac{5\pi^2}{4}|\psi_2|$, то есть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{3\pi^2}{2} \leq x_1 \leq \frac{5\pi^2}{2}, -\pi^2 \leq x_2 \leq \frac{3\pi^2}{2} \right\}.$$

Ответ: $\int_0^\pi F(t)dt = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{3\pi^2}{2} \leq x_1 \leq \frac{5\pi^2}{2}, -\pi^2 \leq x_2 \leq \frac{3\pi^2}{2} \right\}$.

Пример 11. Вычислить интеграл от многозначного отображения $F(t) = \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Решение. Найдем опорную функцию множества $G = \int_0^{2\pi} F(t)dt$:

$$\begin{aligned} c\left(\int_0^{2\pi} F(t)dt, \psi\right) &= \int_0^{2\pi} c(F(t), \psi) dt = \int_0^{2\pi} \max\{\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t, -\psi_1 \sin t - \psi_2 \cos t\} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} |\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t| dt = \|\psi\| \int_0^{2\pi} \left| \frac{\psi_1}{\|\psi\|} \sin t + \frac{\psi_2}{\|\psi\|} \cos t \right| dt. \end{aligned}$$

Так как $\left| \frac{\psi_1}{\|\psi\|} \right| \leq 1, \left| \frac{\psi_2}{\|\psi\|} \right| \leq 1$ и $\left(\frac{\psi_1}{\|\psi\|} \right)^2 + \left(\frac{\psi_2}{\|\psi\|} \right)^2 = 1$, то существует $\alpha \in [0, 2\pi)$ такое, что $\cos \alpha = \frac{\psi_1}{\|\psi\|}, \sin \alpha = \frac{\psi_2}{\|\psi\|}$. Тогда

$$\begin{aligned} c\left(\int_0^{2\pi} F(t)dt, \psi\right) &= \|\psi\| \int_0^{2\pi} |\cos \alpha \sin t + \sin \alpha \cos t| dt = \|\psi\| \int_0^{2\pi} |\sin(t + \alpha)| dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} s = t + \alpha \\ 0 \rightarrow \alpha \\ 2\pi \rightarrow 2\pi + \alpha \end{array} \right] = \|\psi\| \int_\alpha^{2\pi + \alpha} |\sin s| ds. \end{aligned}$$

В силу π -периодичности функции $|\sin t|$ имеем

$$c\left(\int_0^{2\pi} F(t)dt, \psi\right) = \|\psi\| \int_0^{2\pi} |\sin s| ds = 2\|\psi\| \int_0^\pi \sin s ds = 2\|\psi\| (-\cos s)\Big|_0^\pi = 4\|\psi\|.$$

Опорная функция шара $S_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ также имеет вид $4\|\psi\|$, то есть $G = S_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} F(t)dt = S_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример 12. Вычислить интеграл от многозначного отображения $F(t) = \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Решение. Найдем опорную функцию множества $G = \int_0^{2\pi} F(t)dt$:

$$\begin{aligned} c\left(\int_0^{2\pi} F(t)dt, \psi\right) &= \int_0^{2\pi} c(F(t), \psi) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \max\{\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t, -\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t, -\psi_1 \sin t - \psi_2 \cos t, \psi_1 \sin t - \psi_2 \cos t\} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (|\psi_1 \sin t| + |\psi_2 \cos t|) dt = |\psi_1| \int_0^{2\pi} |\sin t| dt + |\psi_2| \int_0^{2\pi} |\cos t| dt = \\ &= 4|\psi_1| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + 4|\psi_2| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 4|\psi_1| + 4|\psi_2|. \end{aligned}$$

Опорная функция квадрата $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -4 \leq x_1 \leq 4, -4 \leq x_2 \leq 4 \right\}$ также имеет вид $4|\psi_1| + 4|\psi_2|$,

поэтому $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -4 \leq x_1 \leq 4, -4 \leq x_2 \leq 4 \right\}$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} F(t) dt = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -4 \leq x_1 \leq 4, -4 \leq x_2 \leq 4 \right\}$.

Пример 13. Вычислить интеграл от многозначного отображения $F(t) = A(t)S_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Решение. Найдем опорную функцию множества $G = \int_0^{2\pi} F(t) dt$:

$$c \left(\int_0^{2\pi} F(t) dt, \psi \right) = \int_0^{2\pi} c(F(t), \psi) dt = \int_0^{2\pi} c \left(A(t)S_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}, \psi \right) dt = \int_0^{2\pi} c \left(S_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}, A^T(t)\psi \right) dt.$$

Найдем новый опорный вектор и его модуль:

$$\varphi = A^T(t)\psi = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \sin t - \psi_2 \cos t \\ \psi_1 \cos t + \psi_2 \sin t \end{pmatrix},$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\psi_1 \sin t - \psi_2 \cos t)^2 + (\psi_1 \cos t + \psi_2 \sin t)^2} =$$

$$= \sqrt{\psi_1^2 \sin^2 t - 2\psi_1\psi_2 \sin t \cos t + \psi_2^2 \cos^2 t + \psi_1^2 \cos^2 t + 2\psi_1\psi_2 \sin t \cos t + \psi_2^2 \sin^2 t} = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \|\psi\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} c \left(\int_0^{2\pi} F(t) dt, \psi \right) &= \int_0^{2\pi} (3 \sin t (\psi_1 \sin t - \psi_2 \cos t) + 2 \cos t (\psi_1 \cos t + \psi_2 \sin t) + 2 \|\psi\|) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\psi_1 (\sin^2 t + 2) - \psi_2 \sin t \cos t + 2 \|\psi\|) dt = \\ &= \psi_1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5 - \cos 2t}{2} \right) dt - \psi_2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + 2 \|\psi\| \int_0^{2\pi} dt = \\ &= 5\pi\psi_1 + 4\pi \|\psi\|. \end{aligned}$$

Опорная функция шара $S_{4\pi} \begin{pmatrix} 5\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ также имеет вид $5\pi\psi_1 + 4\pi \|\psi\|$, поэтому $G = S_{4\pi} \begin{pmatrix} 5\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\int_0^{2\pi} F(t) dt = S_{4\pi} \begin{pmatrix} 5\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Рассмотрим объект, движение которого описывается линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + u, \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}$ – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, A – матрица размера $n \times n$ с вещественными элементами.

Пусть задано множество $U \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 11. Функция $u(t)$ называется **допустимым управлением** на некотором отрезке $[t_0, t_1]$, если она измерима и удовлетворяет включению $u(t) \in U$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n заданы два непустых компактных множества M_0 и M_1 . Будем говорить, что допустимое управление $u(t)$, заданное на отрезке $[t_0, t_1]$, осуществляет переход объекта из начального множества M_0 на конечное множество M_1 , если соответствующее решение системы

$$\dot{x} = Ax + u(t) \quad (2)$$

удовлетворяет граничным условиям

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1. \quad (3)$$

В дальнейшем будем предполагать, что начальный момент времени t_0 зафиксирован, а конечный момент t_1 определяется из условия попадания решения $x(t)$ на множество M_1 .

Задача быстрогодействия заключается в нахождении допустимого управления $u(t)$, осуществляющего переход из множества M_0 на множество M_1 за наименьшее время.

Теорема (о существовании оптимального управления) [Благодатских В.И.]. Пусть существует хотя бы одно допустимое управление $u(t)$, осуществляющее переход объекта из начального множества M_0 на конечное множество M_1 . Тогда существует оптимальное управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1^*]$, переводящее объект из начального множества M_0 на конечное множество M_1 за минимальное время

Определение 12 [Благодатских]. Будем говорить, что пара $(u(t), x(t))$ **удовлетворяет принципу максимума Понтрягина** на отрезке времени $[t_0, t_1]$, если существует такое решение $\psi(t)$ вспомогательной сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \quad (4)$$

с начальным условием $\psi(t_0) \in S$, что выполнены следующие условия:

а) условие максимума:

$$(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t)) \quad (5)$$

для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

б) условие трансверсальности на множестве M_0 :

$$(x(t_0), \psi(t_0)) = c(M_0, \psi(t_0)); \quad (6)$$

в) условие трансверсальности на множестве M_1 :

$$(x(t_1), -\psi(t_1)) = c(M_1, -\psi(t_1)). \quad (7)$$

Теорема (необходимые условия оптимальности) [Благодатских В.И.]. Пусть в задаче быстрогодействия множества M_0 и M_1 выпуклы. Пусть, далее, $u^*(t)$ – оптимальное управление, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$ и $x^*(t)$ – соответствующее ему решение системы (2). Тогда пара $(u^*(t), x^*(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $[t_0, t_1]$.

Таким образом, для решения задачи быстрогодействия можно поступить следующим образом: найти все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, а затем среди этого множества управлений каким-либо образом найти действительно оптимальное управление. Эффективность такого подхода определяется тем, как много управлений будет удовлетворять принципу максимума. Чем уже множество таких управлений, тем проще выбрать из него действительно оптимальное управление. Оказывается, что принцип максимума Понтрягина в этом смысле является довольно эффективным средством решения линейных задач быстрогодействия.

Рассмотрим, как построить все управления, удовлетворяющие принципу максимума. Для этого можно предложить следующую схему (рис. 1). Начальный момент времени t_0 в нашей задаче зафиксирован. Возьмем произвольный начальный вектор $\psi(t_0)$ из единичной сферы $S \subset \mathbb{R}^n$. Найдем решение $\psi(t)$ сопряженной системы (4) с этим начальным значением $\psi(t_0)$. В силу теоремы Каратеодори это решение $\psi(t)$ [Филиппов] существует и единственно на любом отрезке времени $[t_0, t_1]$ и определяется формулой Коши

$$\psi(t) = e^{-A^T(t-t_0)}\psi(t_0). \quad (8)$$

Факт единственности этого решения показан на схеме одинарной стрелкой. Далее, зная решение $\psi(t)$ сопряженной системы, найдем все допустимые управления $u(t) \in U$, удовлетворяющие условию максимума (5). Таких управлений $u(t)$ может быть несколько, и это указано на схеме двойной стрелкой.

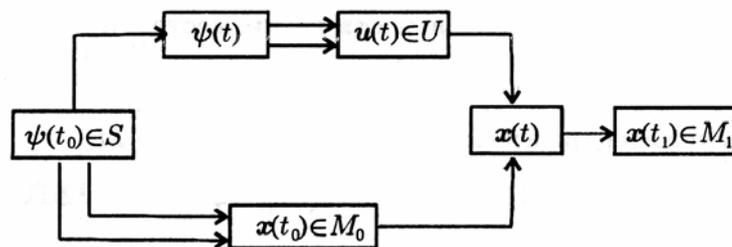


Рис. 1

По выбранному начальному вектору $\psi(t_0)$ найдем все начальные значения вектора фазового состояния объекта $x(t_0)$ из начального множества M_0 , удовлетворяющие условию трансверсальности на множестве M_0 (6). Таких начальных значений $x(t_0)$ опять может быть несколько. Этот факт также показан на схеме двойной стрелкой. Теперь, зная допустимое управление $u(t)$ и начальное состояние объекта $x(t_0)$, найдем решение уравне-

ния (2). Это решение $x(t)$ в силу теоремы Каратеодори существует, единственно и определяется формулой Коши

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}u(s)ds. \quad (9)$$

После того, как построено решение $x(t)$, осталось только проверить, достигнет ли это решение при каком-либо $t_1 \geq t_0$ множества M_1 или нет, а если решение $x(t)$ достигнет в какой-то момент t_1 множества M_1 , то выполняется ли условие трансверсальности на множестве M_1 (7). Если это условие выполнено, то пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на полученном отрезке времени $[t_0, t_1]$, если это условие не выполнено, то пара $(u(t), x(t))$ не удовлетворяет принципу максимума.

Заметим, что при таком подходе все пары $(u(t), x(t))$, удовлетворяющие принципу максимума, зависят лишь от начального вектора $\psi(t_0) \in S$, причем эта зависимость на двух этапах может быть неоднозначной.

Проиллюстрируем данную схему решения задачи быстродействия на конкретных примерах.

Пример 14. Решить задачу быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = v, \end{cases} \quad |v| \leq 1, \quad (10)$$

$$M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = 0 \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 2, -1 \leq x_2 \leq 1 \right\} \quad (\text{рис.2}).$$

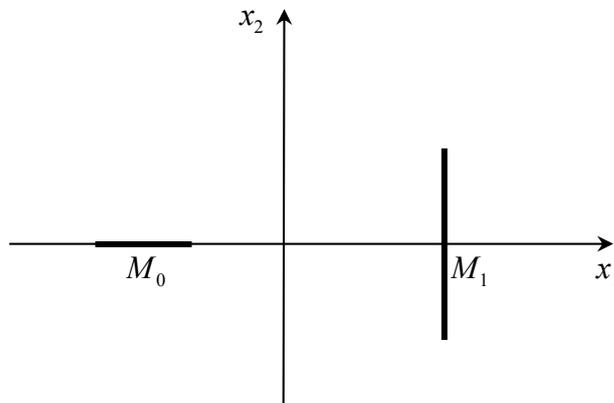


Рис.2

Решение. Не ограничивая общности, будем считать, что $t_0 = 0$. Приведем данную задачу к стандартному виду. Для этого введем новые переменные $u_1 = 0, u_2 = v$. Ограничение на управление $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ задается множеством

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : u_1 = 0, -1 \leq u_2 \leq 1 \right\}.$$

Найдем все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, для чего запишем все условия этого принципа применительно к данной задаче.

Матрица A для системы (10) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и сопряженная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \quad (11)$$

Опорные функции множеств U , M_0 и M_1 вычисляются непосредственно:

$$c(U, \psi) = |\psi_2|, \quad c(M_0, \psi) = -\frac{3}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}|\psi_1|, \quad c(M_1, \psi) = 2\psi_1 + |\psi_2|.$$

Из условия максимума (5) получаем равенство

$$u_2(t)\psi_2(t) = |\psi_2(t)|,$$

следовательно, имеем

$$u_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_2(t) > 0, \\ -1, & \text{если } \psi_2(t) < 0, \\ [-1, 1], & \text{если } \psi_2(t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из условия трансверсальности на множестве M_0 (6) получаем равенство

$$x_1(0)\psi_1(0) = -\frac{3}{2}\psi_1(0) + |\psi_1(0)|,$$

следовательно,

$$x_1(0) = \begin{cases} -1, & \text{если } \psi_1(0) > 0, \\ -2, & \text{если } \psi_1(0) < 0, \\ [-2, -1], & \text{если } \psi_1(0) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

И, наконец, из условия трансверсальности на множестве M_1 (7) получаем равенство

$$-2\psi_1(t_1) - x_2(t_1)\psi_2(t_1) = -2\psi_1(t_1) + |\psi_2(t_1)|,$$

откуда

$$x_2(t_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_2(t_1) < 0, \\ -1, & \text{если } \psi_2(t_1) > 0, \\ [-1, 1], & \text{если } \psi_2(t_1) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим решение сопряженной системы с начальным условием $\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \in S$.

Это решение имеет вид

$$\begin{cases} \psi_1 \equiv \psi_{10}, \\ \psi_2(t) = -\psi_{10}t + \psi_{20}. \end{cases}$$

Из условия максимума (12) следует, что управление $u_2(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, зависит от знака функции $\psi_2(t)$. Для тех моментов времени t , для которых $\psi_2(t) > 0$, управление имеет вид $u_2(t) = 1$. Для тех моментов t , для которых $\psi_2(t) < 0$, управление имеет вид $u_2(t) = -1$. Если в какой-то момент времени θ функция $\psi_2(t)$ обращается в нуль, то в этот момент времени управление $u_2(\theta)$ из условия максимума не определяется. Оно может принимать произвольное значение $u_2(\theta) \in [-1, 1]$.

Функция $\psi_2(t)$ линейно зависит от времени t и не может тождественно обращаться в нуль, поскольку $\|\psi(0)\|=1$. Таким образом, функция $\psi_2(t)$ может обращаться в нуль не более чем в одной точке. Следовательно, управление $u_2(t)$, удовлетворяющее условию максимума (12), является кусочно постоянным, принимающим лишь два значения -1 и 1, причем оно может менять свое значение не более одного раза именно в тот момент времени θ , когда $\psi_2(\theta)=0$. Произвол в выборе управления $u_2(t)$ в одной точке $t=\theta$ никак не сказывается на решении $x(t)$ системы уравнений (10).

Выясним, по какой траектории в фазовой плоскости $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ будет двигаться точка $x(t)$ в случае, когда $u_2(t) \equiv 1$. В силу системы (10) имеем соотношения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \\ x_2 = t + x_{20}. \end{cases} \quad (15)$$

Исключая время t , получаем:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_{20})^2 + x_{20}(x_2 - x_{20}) + x_{10} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10},$$

то есть

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C,$$

где C – постоянная, определяемая начальной точкой траектории. Такие фазовые кривые изображены на рис.3. Они представляют собой семейство парабол, направление движения по которым указано стрелками. Такое направление объясняется тем, что $\dot{x}_2 = 1$, то есть координата $x_2(t)$ возрастает с течением времени.

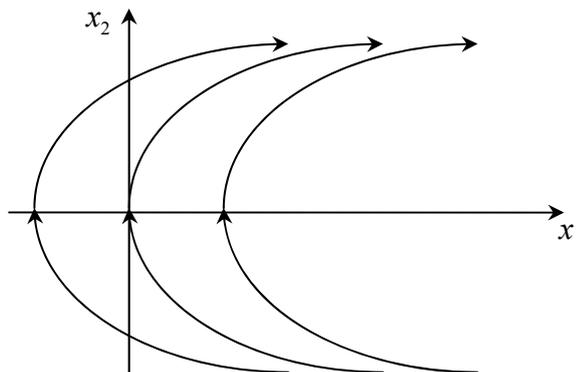


Рис.3

Аналогично для случая, когда $u_2(t) \equiv -1$, имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \\ x_2 = -t + x_{20}. \end{cases} \quad (16)$$

Исключая t , получаем:

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \bar{C}, \quad \text{где } \bar{C} = \frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}.$$

Фазовые траектории для данного случая изображены на рис.4.

Таким образом, в моменты времени t , когда $u_2(t) = 1$, движение фазовой точки $x(t)$ происходит по траекториям, изображенным на рис.3, а в моменты времени t , когда $u_2(t) = -1$, – по траекториям, изображенным на рис.4.

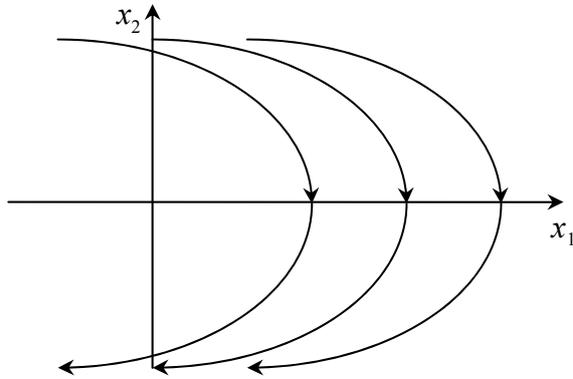


Рис.4

Построим теперь все управления и траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. Для этого исследуем поведение линейной функции $\psi_2(t) = -\psi_{10} t + \psi_{20}$.

Будем выбирать всевозможные начальные значения $\begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \in S$. Рассмотрим три случая:

I. Если $\psi_{10} < 0$, то из условия трансверсальности на множестве M_0 следует, что начальная точка траектории имеет вид $x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае может быть положительной при всех $t > 0$ (если $\psi_{20} \geq 0$), либо до некоторого момента времени $\theta > 0$ быть отрицательной, а затем стать положительной (если $\psi_{20} < 0$) (рис.5).

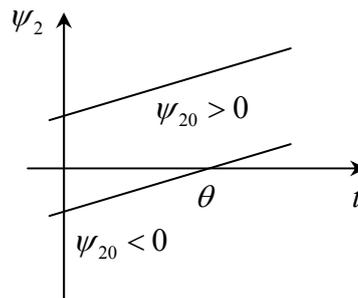


Рис.5

Следовательно, согласно условию максимума (12) управление $u_2(t)$ будет иметь вид $u_2(t) \equiv 1$ или в некоторый момент времени θ оно переключается с -1 на 1. В обоих случаях фазовая траектория $x(t)$, выходящая из точки $x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, никогда не достигнет множества M_1 (рис.6).

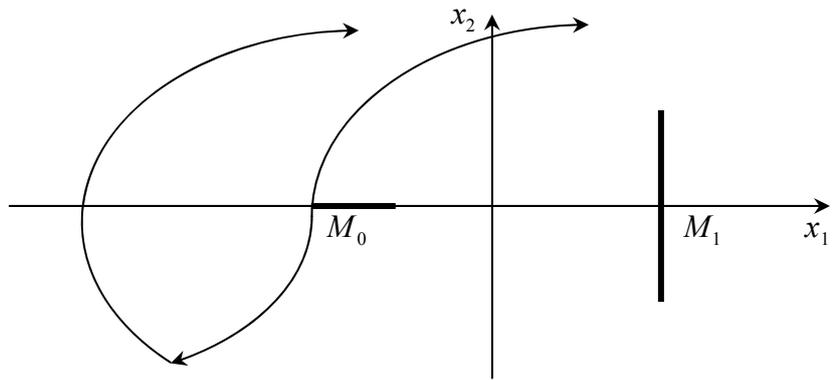


Рис.6

II. Если $\psi_{10} = 0$, то из соотношения (13) следует, что начальная точка $x(0)$ может принимать произвольное значение из множества M_0 . В этом случае $\psi_{20} \neq 0$, поскольку $\psi(0) \in S$, а функция $\psi_2(t)$ либо отрицательна при всех $t \geq 0$, если $\psi_{20} < 0$, либо положительна при всех $t \geq 0$, если $\psi_{20} > 0$ (рис.7). В силу условия (12) это означает, что управление $u_2(t)$ постоянно при всех $t \geq 0$ и равно -1, если $\psi_{20} < 0$, или 1, если $\psi_{20} > 0$.

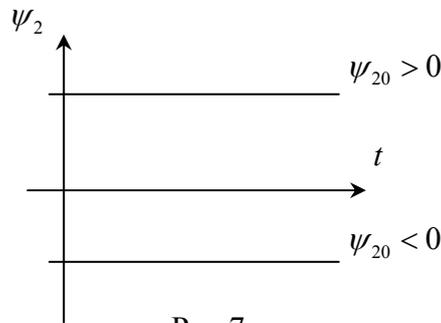


Рис.7

Все траектории с такими постоянными управлениями изображены на рис.8 и ни одна из них не достигает множества M_1 .

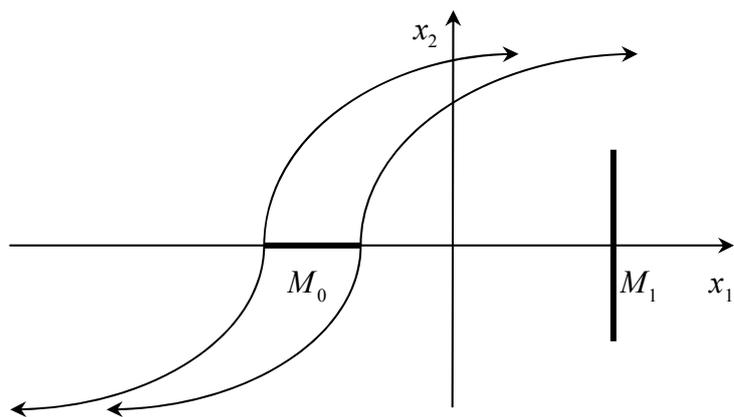


Рис.8

III. Если $\psi_{10} > 0$, то из условия трансверсальности на множестве M_0 (13) следует, что начальная точка траектории имеет вид $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае может быть отрицательной при всех $t > 0$ (если $\psi_{20} \leq 0$), либо до некоторого момента времени

$\theta > 0$ быть положительной, а затем стать отрицательной (если $\psi_{20} > 0$) (рис.9). При этом момент θ может быть сделан произвольным, так как он определяется из условия $-\psi_{10}\theta + \psi_{20} = 0$.

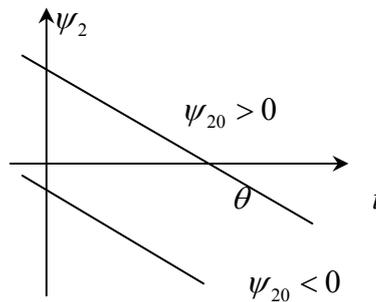


Рис.9

Следовательно, согласно условию максимума (12) управление $u_2(t)$ будет иметь вид $u_2(t) \equiv -1$ или в некоторый момент времени θ переключается с 1 на -1. В первом случае фазовая траектория $x(t)$, выходящая из точки $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, никогда не достигнет множества M_1 (рис.10).

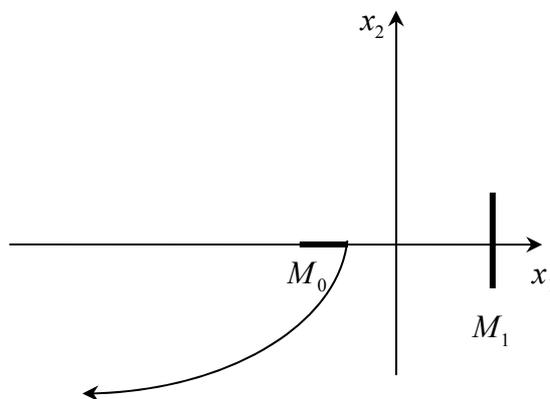


Рис.10

Если управление $u_2(t)$ вначале равно 1, а затем -1, то при некоторых θ траектории такого вида достигнут множества M_1 (рис.11). Из рисунка видно, что таких траекторий бесконечно много и в каждую точку множества M_1 попадает одна траектория данного вида. Проверим условие трансверсальности на множестве M_1 (14). Поскольку для всех траекторий данного вида $\psi_2(t_1) < 0$, из соотношения (14) следует, что конечная точка траектории $x(t)$ определяется условием $x_2(t_1) = 1$. Этому конечному условию удовлетворяет лишь одна траектория данного типа. На рис. 11 она изображена жирной линией.

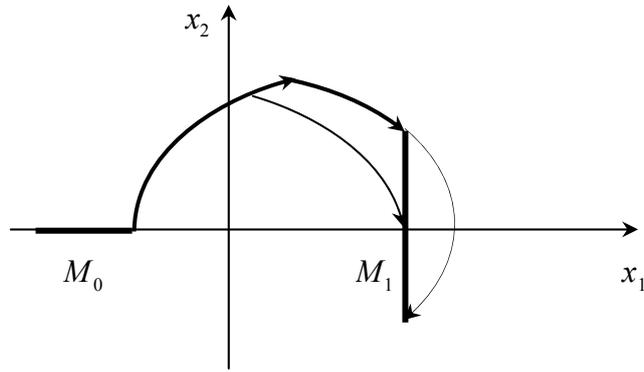


Рис.11

Найдем эту единственную траекторию, удовлетворяющую принципу максимума. Точка $x(\theta)$ лежит на пересечении параболы $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C$, проходящей через точку $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, и параболы $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \bar{C}$, проходящей через точку $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем ее, исходя из этого условия. Первая парабола задается уравнением $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - 1$, а вторая: $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{2}$. Точка их пересечения находится из системы

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - 1, \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}, \\ x_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}. \end{cases}$$

Движение начинается из точки $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ с управлением $u_2(t) = 1$. Найдем траекторию $x(t)$ из системы (15) с учетом начального условия:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 - 1, \\ x_2 = t. \end{cases}$$

По этой траектории точка будет двигаться до момента времени θ , который определяется из условия попадания траектории $x(t)$ в точку $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}$. Имеем $\begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\theta^2 - 1, \\ \sqrt{\frac{7}{2}} = \theta, \end{cases}$

откуда, $\theta = \sqrt{\frac{7}{2}}$. Начиная с этого момента времени управление $u_2(t)$ равно -1. Дальнейшую траекторию найдем из системы (16) с учетом начального условия $x_1(\theta) = \frac{3}{4}, x_2(\theta) = \sqrt{\frac{7}{2}}$:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} = -\frac{7}{4} + \sqrt{\frac{7}{2}}x_{20} + x_{10}, \\ \sqrt{\frac{7}{2}} = -\sqrt{\frac{7}{2}} + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{10} = -\frac{9}{2}, \\ x_{20} = \sqrt{14}. \end{cases}$$

Таким образом, соответствующее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + \sqrt{14}t - \frac{9}{2}, \\ x_2 = -t + \sqrt{14}. \end{cases}$$

Момент времени t_1 определяется из условия попадания траектории в конечную точку $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Получаем

$$\begin{cases} 2 = -\frac{1}{2}t^2 + \sqrt{14}t - \frac{9}{2}, \\ 1 = -t + \sqrt{14} \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{14} - 1.$$

Итак, мы установили, что единственное управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина и переводит объект из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[0, \sqrt{14} - 1]$. По теореме существования оптимального управления в данной задаче оптимальное управление существует. По теореме о необходимых условиях оптимальности это управление должно удовлетворять принципу максимума. А так как мы нашли единственное управление $u(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, то, следовательно, это управление $u(t)$ оптимально.

$$\text{Ответ: } v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \sqrt{\frac{7}{2}}, \\ -1, & \sqrt{\frac{7}{2}} < t \leq \sqrt{14} - 1 \end{cases} \quad \text{— оптимальное управление,}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1, & 0 \leq t < \sqrt{\frac{7}{2}}, \\ x_2(t) = t, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \sqrt{14}t - \frac{9}{2}, \\ x_2(t) = -t + \sqrt{14}, \end{cases} \quad \sqrt{\frac{7}{2}} < t \leq \sqrt{14} - 1 \quad \text{соответствующая}$$

ему траектория, $t^* = \sqrt{14} - 1$ — наименьшее время перехода из множества M_0 на множество M_1 .

Пример 15. Решить задачу быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = v, \end{cases} \quad 0 \leq v \leq 1, \quad (17)$$

$$M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x_1 \leq -1, -1 \leq x_2 \leq 0 \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x_1 \leq 4, 3 \leq x_2 \leq 4 \right\} \quad (\text{рис.12}).$$

Решение. Не ограничивая общности, будем считать, что $t_0 = 0$. Приведем данную задачу к стандартному виду. Для этого введем новые переменные $u_1 = 0, u_2 = v$. Ограничение на управление $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ задается множеством

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : u_1 = 0, 0 \leq u_2 \leq 1 \right\}.$$

Найдем все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, для чего запишем все условия принципа максимума применительно к данной задаче.

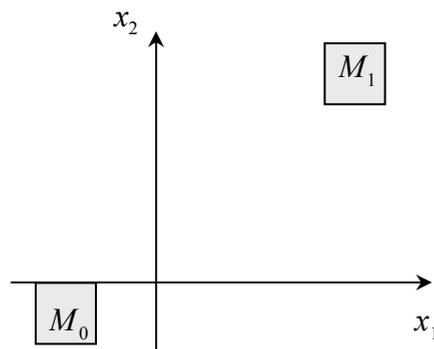


Рис.12

Матрица A для системы (17) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и сопряженная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \quad (18)$$

Из условия максимума (5) получаем равенство

$$u_2(t)\psi_2(t) = \frac{1}{2}\psi_2(t) + \frac{1}{2}|\psi_2(t)|,$$

следовательно, имеем

$$u_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_2(t) > 0, \\ 0, & \text{если } \psi_2(t) < 0, \\ [0, 1], & \text{если } \psi_2(t) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Из условия трансверсальности на множестве M_0 (6) получаем, что вектор $\psi(0)$ является опорным вектором к множеству M_0 в точке $x(0)$, поэтому

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= -1, x_2(0) = 0, & \text{если } \psi_1(0) > 0, \psi_2(0) > 0, \\
x_1(0) &= -1, x_2(0) = -1, & \text{если } \psi_1(0) > 0, \psi_2(0) < 0, \\
x_1(0) &= -2, x_2(0) = -1, & \text{если } \psi_1(0) < 0, \psi_2(0) < 0, \\
x_1(0) &= -2, x_2(0) = 0, & \text{если } \psi_1(0) < 0, \psi_2(0) > 0, \\
x_1(0) &\in [-2, -1], x_2(0) = 0, & \text{если } \psi_1(0) = 0, \psi_2(0) > 0, \\
x_1(0) &\in [-2, -1], x_2(0) = -1, & \text{если } \psi_1(0) = 0, \psi_2(0) < 0, \\
x_1(0) &= -1, x_2(0) \in [-1, 0], & \text{если } \psi_1(0) > 0, \psi_2(0) = 0, \\
x_1(0) &= -2, x_2(0) \in [-1, 0], & \text{если } \psi_1(0) < 0, \psi_2(0) = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

И, наконец, из условия трансверсальности на множестве M_1 (7) получаем, что вектор $-\psi(t_1)$ является опорным вектором к множеству M_1 в точке $x(t_1)$, поэтому

$$\begin{aligned}
x_1(t_1) &= 3, x_2(t_1) = 3, & \text{если } \psi_1(t_1) > 0, \psi_2(t_1) > 0, \\
x_1(t_1) &= 3, x_2(t_1) = 4, & \text{если } \psi_1(t_1) > 0, \psi_2(t_1) < 0, \\
x_1(t_1) &= 4, x_2(t_1) = 4, & \text{если } \psi_1(t_1) < 0, \psi_2(t_1) < 0, \\
x_1(t_1) &= 4, x_2(t_1) = 3, & \text{если } \psi_1(t_1) < 0, \psi_2(t_1) > 0, \\
x_1(t_1) &\in [3, 4], x_2(t_1) = 3, & \text{если } \psi_1(t_1) = 0, \psi_2(t_1) > 0, \\
x_1(t_1) &\in [3, 4], x_2(t_1) = 4, & \text{если } \psi_1(t_1) = 0, \psi_2(t_1) < 0, \\
x_1(t_1) &= 3, x_2(t_1) \in [3, 4], & \text{если } \psi_1(t_1) > 0, \psi_2(t_1) = 0, \\
x_1(t_1) &= 4, x_2(t_1) \in [3, 4], & \text{если } \psi_1(t_1) < 0, \psi_2(t_1) = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим решение сопряженной системы (18) с начальным условием $\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \in S$. Это решение имеет вид

$$\begin{cases} \psi_1 \equiv \psi_{10}, \\ \psi_2(t) = -\psi_{10} t + \psi_{20}. \end{cases}$$

Из условия максимума (12) следует, что управление $u_2(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, зависит от знака функции $\psi_2(t)$. Для тех моментов времени t , для которых $\psi_2(t) > 0$, управление имеет вид $u_2(t) = 1$. Для тех моментов t , для которых $\psi_2(t) < 0$, управление имеет вид $u_2(t) = 0$. Если в какой-то момент времени θ функция $\psi_2(t)$ обращается в нуль, то в этот момент времени управление $u_2(\theta)$ из условия максимума не определяется. Оно может принимать произвольное значение $0 \leq u_2(\theta) \leq 1$.

Функция $\psi_2(t)$ линейно зависит от времени t и не может тождественно обращаться в нуль, поскольку $\|\psi(0)\| = 1$. Таким образом, функция $\psi_2(t)$ может обращаться в нуль не более чем в одной точке. Следовательно, управление $u_2(t)$, удовлетворяющее условию максимума (12), является кусочно постоянным, принимающим лишь два значения 0 и 1, причем оно может менять свое значение не более одного раза именно в тот момент времени θ , когда $\psi_2(\theta) = 0$. Произвол в выборе управления $u_2(t)$ в одной точке $t = \theta$ никак не сказывается на решении $x(t)$ системы уравнений (10). При этом момент θ определяется

из условия $-\psi_{10}\theta + \psi_{20} = 0$, то есть $\theta = \frac{\psi_{20}}{\psi_{10}}$. Следовательно, переключение управления

возможно лишь в том случае, когда ψ_{10} и ψ_{20} одного знака.

Выясним, по какой траектории в фазовой плоскости $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ будет двигаться точка $x(t)$ в случае, когда $u_2(t) \equiv 1$. В силу системы (10) имеем соотношения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \\ x_2 = t + x_{20}. \end{cases} \quad (22)$$

Исключая время t , получаем:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_{20})^2 + x_{20}(x_2 - x_{20}) + x_{10} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10},$$

то есть

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C,$$

где C – постоянная, определяемая начальной точкой траектории. Такие фазовые кривые изображены на рис.3.

Аналогично для случая, когда $u_2(t) \equiv 0$, имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_{20}t + x_{10}, \\ x_2 = x_{20}. \end{cases} \quad (23)$$

Фазовые траектории для данного случая изображены на рис.13.

Построим теперь все управления и траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. Для этого исследуем поведение линейной функции $\psi_2(t) = -\psi_{10}t + \psi_{20}$.

Будем выбирать всевозможные начальные значения $\begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \in S$. Рассмотрим следующие случаи:

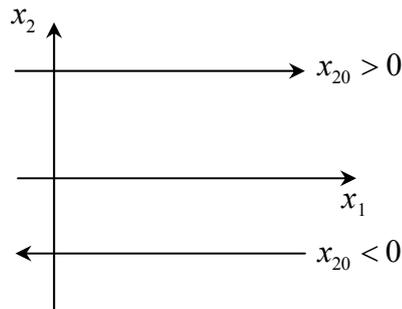


Рис.13

I. Если $\psi_{10} > 0, \psi_{20} > 0$, то из условия трансверсальности на множестве $M_0(20)$ следует, что начальная точка траектории имеет вид $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае может быть положительной при всех $t \in [0, t_1]$, либо, начиная с некоторого момента времени $\theta \in (0, t_1)$, стать отрицательной. Следовательно, согласно условию максимума (19) управление $u_2(t)$ будет иметь вид $u_2(t) \equiv 1$ или в некоторый момент времени θ переключается с

1 на 0. В первом случае фазовая траектория $x(t)$, выходящая из точки $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, достигнет множества M_1 в точке $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = 3$ (рис.14) и условие трансверсальности на множестве M_1 не выполнено: так как $\psi_1(t_1) = \psi_{10} > 0, \psi_2(t_1) > 0$, то в силу (21) $x(t_1)$ должна иметь вид $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

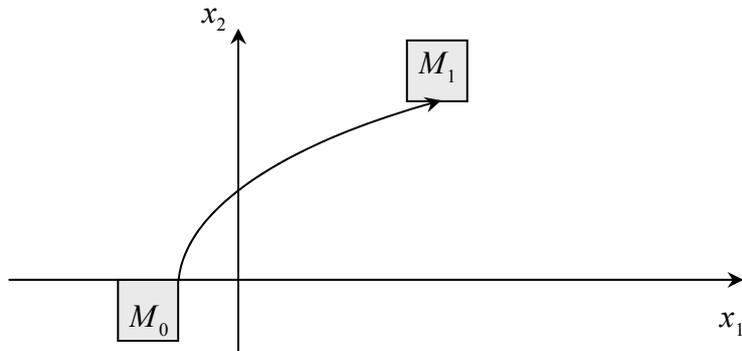


Рис.14

Во втором случае, если переключение управления $u_2(t)$ с 1 на 0 происходит до момента попадания траектории на множество M_1 , движение продолжается по прямой $x_2 = const$ и точка никогда не попадет на конечное множество M_1 (рис.15). Если же переключение происходит в момент попадания траектории в точку $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = 3$, то $\psi_1(t_1) = \psi_{10} > 0, \psi_2(t_1) = 0$ и условие трансверсальности (21) не выполнено.

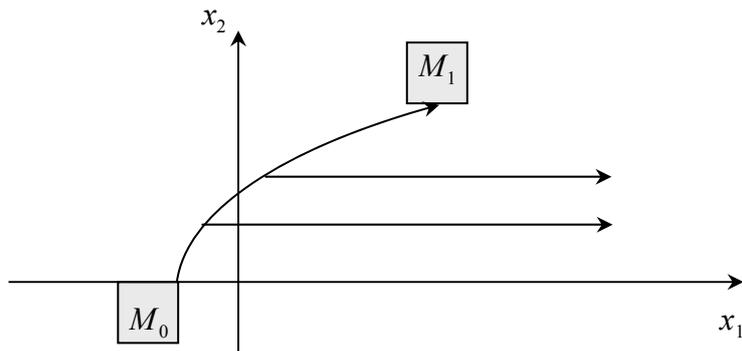


Рис.15

II. Если $\psi_{10} > 0, \psi_{20} < 0$, то в силу (20) начальная точка траектории имеет вид $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае является отрицательной при всех $t \geq 0$. Следовательно, согласно условию максимума управление $u_2(t) \equiv 0$ и фазовая траектория $x(t)$ никогда не достигнет множества M_1 (рис.16).

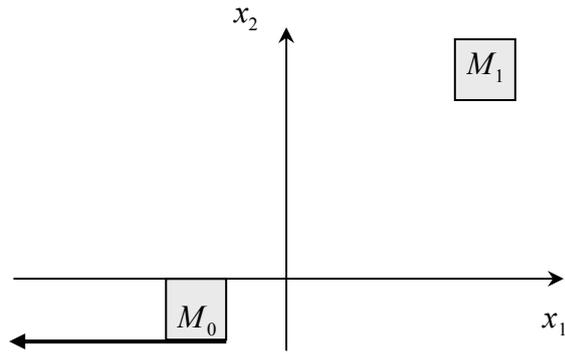


Рис.16

III. Если $\psi_{10} < 0, \psi_{20} < 0$, то в силу условия трансверсальности на множестве M_0 (20) начальная точка траектории имеет вид $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае может быть отрицательной при всех $t \in [0, t_1]$, либо, начиная с некоторого момента времени $\theta \in (0, t_1)$, стать положительной. Следовательно, согласно условию максимума управление $u_2(t) \equiv 0$ или в некоторый момент времени θ управление $u_2(t)$ переключается с 0 на 1. В первом случае фазовая траектория $x(t)$, выходящая из точки $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, никогда не достигнет множества M_1 (рис.17).

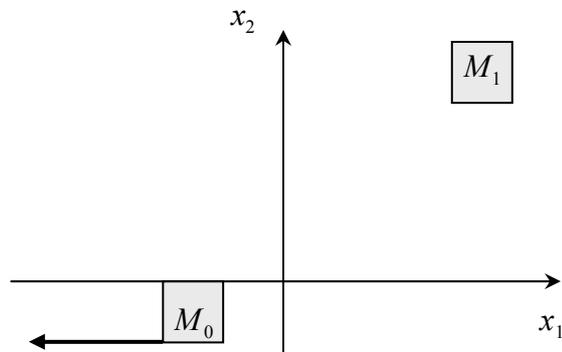


Рис.17

Во втором случае существует бесконечно много траекторий, достигающих множества M_1 в точках $x_1 = 3, \sqrt{11} \leq x_2 \leq 4$ (рис.18). Проверим, для каких из этих траекторий выполняется условие трансверсальности на множестве M_1 . В силу того, что $\psi_1(t_1) = \psi_{10} < 0$, $\psi_2(t_1) > 0$, из (21) следует, что $x(t_1)$ должна иметь вид $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Этому конечному условию не удовлетворяет ни одна из указанных траекторий.

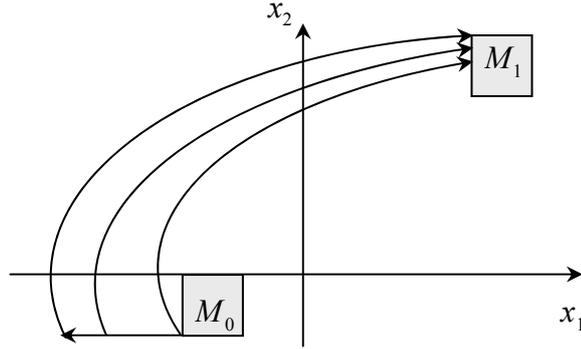


Рис.18

IV. Если $\psi_{10} < 0, \psi_{20} > 0$, то в силу условия трансверсальности на множестве M_0 (20) начальная точка траектории имеет вид $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае положительна при всех $t \geq 0$. Следовательно, согласно условию максимума управление $u_2(t) \equiv 1$ и фазовая траектория $x(t)$, выходящая из точки $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, достигнет множества M_1 в точке $\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$. (рис.19). Проверим выполнение условия трансверсальности на множестве M_1 для данной траектории: так как $\psi_1(t_1) = \psi_{10} < 0, \psi_2(t_1) > 0$, то в силу (21) $x(t_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Таким образом, условие трансверсальности для найденной траектории не выполнено.

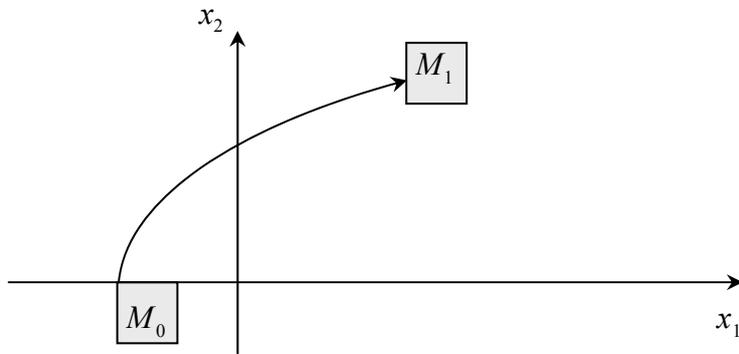


Рис.19

V. Если $\psi_{10} = 0, \psi_{20} > 0$, то в силу (20) начальная точка траектории не определяется однозначно и является любой точкой множества $-2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = 0$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае тождественно равна ψ_{20} . Согласно условию максимума $u_2(t) \equiv 1$ и существует бесконечно много траекторий $x(t)$, достигающих M_1 в точках множества

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 3, 3 \leq x_2 \leq \sqrt{10} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x_1 \leq \frac{7}{2}, x_2 = 3 \right\} \quad (\text{рис.20}).$$

Проверим, для каких из этих траекторий выполняется условие трансверсальности на множестве M_1 . В силу того, что $\psi_1(t_1) = 0, \psi_2(t_1) > 0$, из (21) имеем $3 \leq x_1(t_1) \leq 4, x_2(t_1) = 3$.

Таким образом, принципу максимума удовлетворяют траектории, достигающие множества M_1 в точках множества $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x_1 \leq \frac{7}{2}, x_2 = 3 \right\}$, то есть траектории, начальные точки которых принадлежат множеству $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -\frac{3}{2} \leq x_1 \leq -1, x_2 = 0 \right\}$. На рис.20 они изображены жирными линиями.

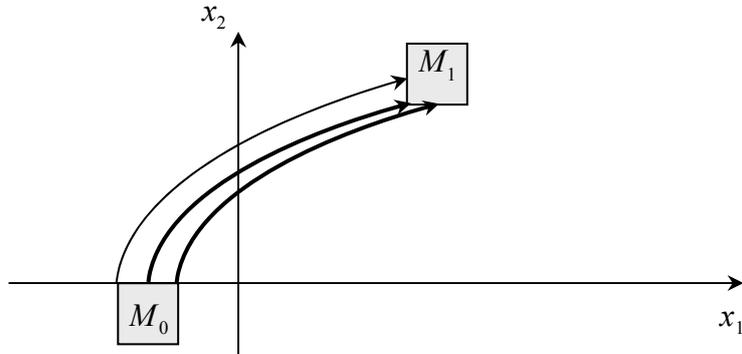


Рис.20

Найдем время перехода из множества M_0 на множество M_1 по данным траекториям. Семейство парабол описывается уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_{10}, \\ x_2 = t, \end{cases} \quad x_{10} \in \left[-\frac{3}{2}, -1 \right].$$

Так как в конечный момент времени t_1 для всех траекторий семейства $x_2 = 3$, то из второго уравнения получаем, что $t_1 = 3$.

VI. Если $\psi_{10} = 0, \psi_{20} < 0$, то в силу (20) начальная точка траектории не определяется однозначно: $-2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = -1$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае тождественно равна ψ_{20} и согласно условию максимума $u_2(t) \equiv 0$. Фазовые траектории в данном случае не достигают множества M_1 (рис.21).

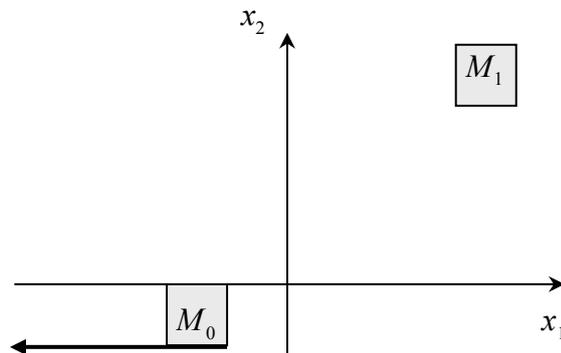


Рис.21

VII. Если $\psi_{10} > 0, \psi_{20} = 0$, то начальная точка траектории принадлежит множеству $x_1(0) = -1, -1 \leq x_2(0) \leq 0$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае отрицательна при всех $t > 0$ и со-

гласно условию максимума $u_2(t) \equiv 0$. Фазовые траектории в данном случае не достигают множества M_1 (рис.22).

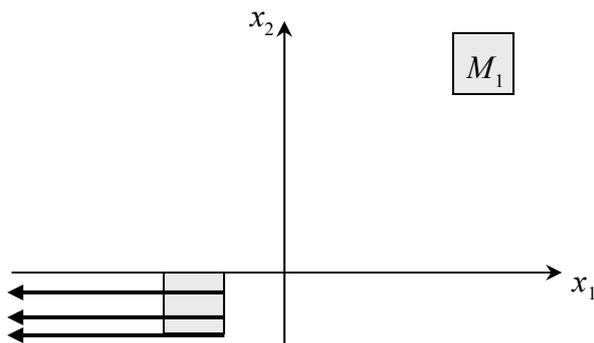


Рис.22

VIII. Если $\psi_{10} < 0, \psi_{20} = 0$, то начальная точка траектории принадлежит множеству $x_1(0) = -2, -1 \leq x_2(0) \leq 0$. Функция $\psi_2(t)$ в этом случае положительна при всех $t > 0$ и согласно условию максимума $u_2(t) \equiv 1$. Таким образом, существует бесконечно много траекторий, достигающих множества M_1 (рис.23) в точках множества $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 3, \sqrt{10} \leq x_2 \leq \sqrt{11} \right\}$. Проверим выполнение для данных траекторий условия трансверсальности на множестве M_1 . Так как $\psi_1(t_1) < 0, \psi_2(t_1) > 0$, то из (21) имеем $x(t_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Этому конечному условию не удовлетворяет ни одна из найденных траекторий.

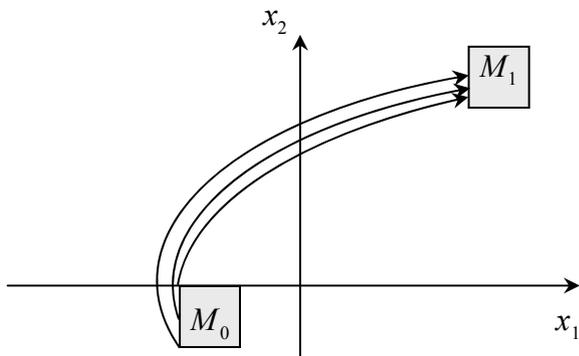


Рис.23

Ответ: $v(t) \equiv 1$ – оптимальное управление, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_{10}, \\ x_2 = t, \end{cases} x_{10} \in \left[-\frac{3}{2}, -1 \right]$ – соответст-

вующие ему траектории, $t^* = 3$ – наименьшее время перехода из множества M_0 на множество M_1 .

Пример 16. Решить задачу быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v, \\ \dot{x}_2 = 2x_1, \end{cases} \quad -1 \leq v \leq 1, \quad M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (24)$$

Решение. Приведем данную задачу к стандартному виду. Для этого введем новые переменные $u_1 = v, u_2 = 0$. Ограничение на управление $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ задается множеством

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0 \right\}.$$

Найдем все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, для чего запишем все условия принципа максимума применительно к данной задаче.

Матрица A для системы (24) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и сопряженная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -2\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Решение сопряженной системы с начальным условием $\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \in S$ имеет вид

$$\begin{cases} \psi_1 = -2\psi_{20}t + \psi_{10}, \\ \psi_2(t) \equiv \psi_{20}. \end{cases}$$

Множества M_0 и M_1 в данном примере состоят из одной точки, следовательно, условия трансверсальности (6) и (7) выполняются автоматически.

Из условия максимума (5) получаем равенство

$$u_1(t)\psi_1(t) = |\psi_1(t)|,$$

следовательно, имеем

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_1(t) > 0, \\ -1, & \text{если } \psi_1(t) < 0, \\ [-1, 1], & \text{если } \psi_1(t) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, управление $u_1(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, зависит от знака функции $\psi_1(t)$. Для тех моментов времени t , для которых $\psi_1(t) > 0$, управление имеет вид $u_1(t) = 1$. Для тех моментов t , для которых $\psi_1(t) < 0$, управление имеет вид $u_1(t) = -1$. Если в какой-то момент времени θ функция $\psi_1(t)$ обращается в нуль, то в этот момент времени управление $u_1(\theta)$ из условия максимума не определяется. Оно может принимать произвольное значение $-1 \leq u_1(\theta) \leq 1$.

Функция $\psi_1(t)$ линейно зависит от времени t и не может тождественно обращаться в нуль, поскольку $\|\psi(0)\| = 1$. Таким образом, функция $\psi_1(t)$ может обращаться в нуль не более чем в одной точке. Следовательно, управление $u_1(t)$, удовлетворяющее условию максимума (12), является кусочно постоянным, принимающим лишь два значения -1 и 1, причем оно может менять свое значение не более одного раза именно в тот момент времени θ , когда $\psi_1(\theta) = 0$. Произвол в выборе управления $u_1(t)$ в одной точке $t = \theta$ никак не сказывается на решении $x(t)$ системы уравнений (10).

Выясним, по какой траектории в фазовой плоскости $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ будет двигаться точка $x(t)$ в случае, когда $u_1(t) \equiv 1$. В силу системы (10) в этом случае имеем соотношения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t + x_{10}, \\ x_2 = t^2 + 2x_{10}t + x_{20}. \end{cases} \quad (27)$$

Исключая время t , получаем:

$$x_2 = (x_1 - x_{10})^2 + 2x_{10}(x_1 - x_{10}) + x_{20} \Rightarrow x_2 = x_1^2 - x_{10}^2 + x_{20},$$

то есть $x_2 = x_1^2 + C$, где C – постоянная, определяемая начальной точкой траектории. Такие фазовые кривые изображены на рис.24. Они представляют собой семейство парабол, направление движения по которым указано стрелками. Такое направление объясняется тем, что $\dot{x}_1 = 1$, то есть координата $x_1(t)$ возрастает с течением времени.

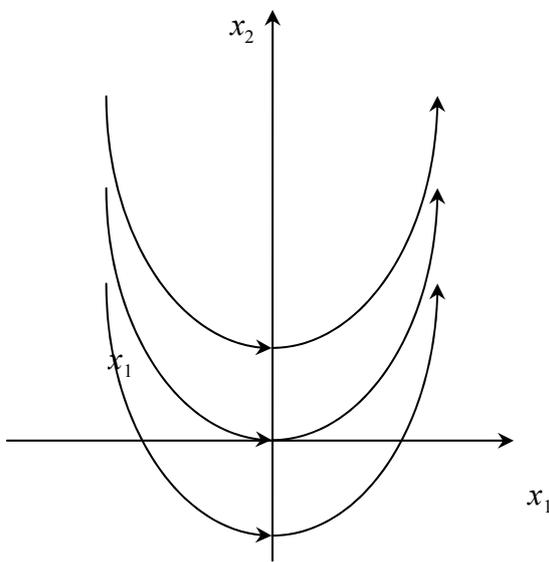


Рис.24

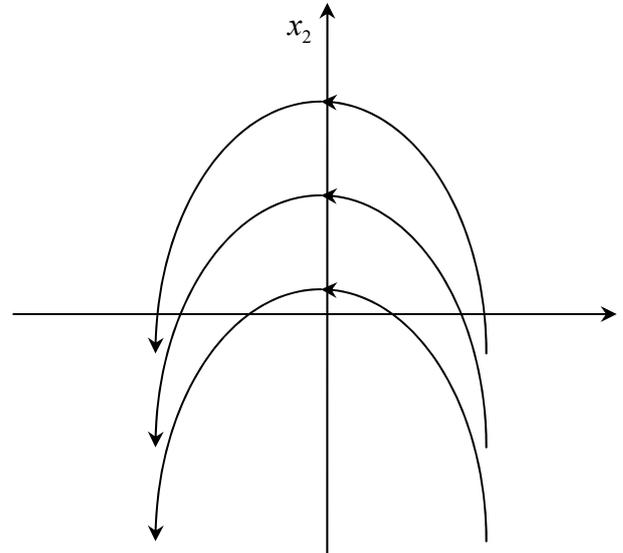


Рис.25

Аналогично для случая, когда $u_1(t) \equiv -1$, имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t + x_{10}, \\ x_2 = -t^2 + 2x_{10}t + x_{20}. \end{cases} \quad (28)$$

Исключая t , получаем $x_2 = -x_1^2 + \bar{C}$, где $\bar{C} = x_{10}^2 + x_{20}$. Фазовые траектории для данного случая изображены на рис.25.

Найдем все управления и траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. Если управление $u_1(t)$ не имеет переключения, а тождественно равно 1 или -1 при всех $t \geq 0$, то такие траектории $x(t)$, начинающиеся на множестве M_0 , не попадают на множество M_1 (рис.26).

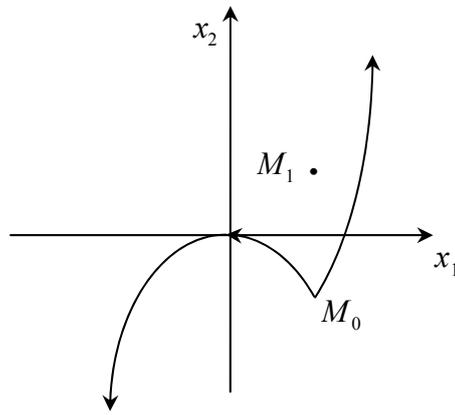


Рис.26

Если управление $u_1(t)$ переключается с 1 на -1 в некоторый момент θ , то одна из таких траекторий достигнет множества M_1 (рис.27). Если управление $u_1(t)$ переключается с -1 на 1 в некоторый момент θ , то одна из таких траекторий достигнет множества M_1 (рис.28).

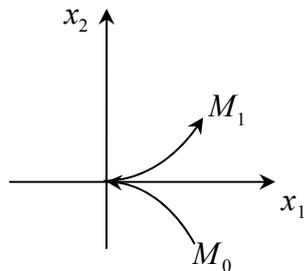


Рис.27

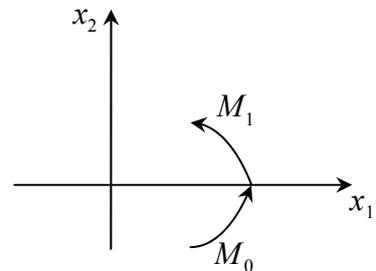


Рис.28

Таким образом, принципу максимума Понтрягина удовлетворяют два различных управления. Зная фазовые траектории, то есть параболы, изображенные на рис.24 и рис.25, и используя системы (27) и (28), найдем эти два управления и соответствующие решения $x(t)$.

В первом случае точка $x(\theta)$ лежит на пересечении параболы $x_2 = -x_1^2 + \bar{C}$, проходящей через точку $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, и параболы $x_2 = x_1^2 + C$, проходящей через точку $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем ее, исходя из этого условия. Первая парабола задается уравнением $x_2 = -x_1^2$, а вторая: $x_2 = x_1^2$. Точка их пересечения находится из системы

$$\begin{cases} x_2 = -x_1^2, \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Движение начинается из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ с управлением $u_2(t) = -1$. Найдем траекторию $x(t)$ из системы (27) с учетом начального условия:

$$\begin{cases} x_1 = -t + 1, \\ x_2 = -t^2 + 2t - 1. \end{cases}$$

По этой траектории точка будет двигаться до момента времени θ , который определяется из условия попадания траектории $x(t)$ в точку $x_1 = 0, x_2 = 0$. Имеем
$$\begin{cases} 0 = -\theta + 1, \\ 0 = -\theta^2 + 2\theta - 1, \end{cases}$$
 откуда, $\theta = 1$. Начиная с этого момента времени управление $u_2(t)$ равно 1. Дальнейшую траекторию найдем из системы (28) с учетом начального условия $x_1(\theta) = 0, x_2(\theta) = 0$:

$$\begin{cases} 0 = 1 + x_{10}, \\ 0 = 1 + 2x_{10} + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{10} = -1, \\ x_{20} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, соответствующее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = t - 1, \\ x_2 = t^2 - 2t + 1. \end{cases}$$

Момент времени t_1 определяется из условия попадания траектории в конечную точку $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Получаем

$$\begin{cases} 1 = t - 1, \\ 1 = t^2 - 2t + 1 \end{cases} \Rightarrow t = 2.$$

Во втором случае точка $x(\theta)$ лежит на пересечении параболы $x_2 = x_1^2 + C$, проходящей через точку $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, и параболы $x_2 = -x_1^2 + \bar{C}$, проходящей через точку $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем ее, исходя из этого условия. Первая парабола задается уравнением $x_2 = x_1^2 - 2$, а вторая — $x_2 = -x_1^2 + 2$. Точка их пересечения находится из системы

$$\begin{cases} x_2 = x_1^2 - 2, \\ x_2 = -x_1^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2}, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Движение начинается из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ с управлением $u_2(t) = 1$. Найдем траекторию $x(t)$ из системы (27) с учетом начального условия:

$$\begin{cases} x_1 = t + 1, \\ x_2 = t^2 + 2t - 1. \end{cases}$$

По этой траектории точка будет двигаться до момента времени θ , который определяется из условия попадания траектории $x(t)$ в точку $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 0$. Имеем
$$\begin{cases} \sqrt{2} = \theta + 1, \\ 0 = \theta^2 + 2\theta - 1, \end{cases}$$
 откуда, $\theta = \sqrt{2} - 1$. Начиная с этого момента времени управление $u_2(t)$ равно -1. Дальнейшую траекторию найдем из системы (28) с учетом начального условия $x_1(\theta) = \sqrt{2}, x_2(\theta) = 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{2} = -(\sqrt{2} - 1) + x_{10}, \\ 0 = -(\sqrt{2} - 1)^2 + 2x_{10}(\sqrt{2} - 1) + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{10} = 2\sqrt{2} - 1, \\ x_{20} = 4\sqrt{2} - 7. \end{cases}$$

Таким образом, соответствующее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -t + 2\sqrt{2} - 1, \\ x_2 = -t^2 + 2(2\sqrt{2} - 1)t + 4\sqrt{2} - 7. \end{cases}$$

Момент времени t_1 определяется из условия попадания траектории в конечную точку $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Получаем

$$\begin{cases} 1 = -t + 2\sqrt{2} - 1, \\ 1 = -t^2 + 2(2\sqrt{2} - 1)t + 4\sqrt{2} - 7 \end{cases} \Rightarrow t = 2\sqrt{2} - 2.$$

Сравнивая время перехода из M_0 на M_1 при этих управлениях, получаем, что второе управление оптимально, а первое – нет.

Ответ: $v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \sqrt{2} - 1, \\ -1, & \sqrt{2} - 1 < t \leq 2(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$ – оптимальное управление, $\begin{cases} x_1 = t + 1, \\ x_2 = t^2 + 2t - 1, \end{cases}$

$0 \leq t < \sqrt{2} - 1$, $\begin{cases} x_1 = -t + 2\sqrt{2} - 1, \\ x_2 = -t^2 + 2(2\sqrt{2} - 1)t + 4\sqrt{2} - 7, \end{cases}$ $\sqrt{2} - 1 \leq t < 2(\sqrt{2} - 1)$ – соответствующая

ему траектория, $t^* = 2(\sqrt{2} - 1)$ – наименьшее время перехода из множества M_0 на множество M_1 .

Пример 17. Найти оптимальное управление, переводящее объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \end{cases} \quad (29)$$

с ограничением на управление $u \in U = S_1(0)$, из начального множества $M_0 = \{0\}$ на конечное множество

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 2\pi, -1 \leq x_2 \leq 1 \right\}$$

за наименьшее время.

Решение. Пусть $t_0 = 0$. Применим принцип максимума. Сопряженная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1. \end{cases}$$

Найдем решение $\psi(t)$ этой системы с произвольным начальным условием

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \in S.$$

Воспользуемся формулой Коши (8). Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ экспоненциал e^{At} имеет вид [Благодатских, стр.]

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение $\psi(t)$ задается соотношением

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{-At} \psi(0) = \left(e^{A(-t)} \right)^T = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \cos \alpha + \sin t \sin \alpha \\ -\sin t \cos \alpha + \cos t \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - t) \\ \sin(\alpha - t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Условие максимума (5) приобретает вид

$$(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t)) = \|\psi(t)\|.$$

Поскольку $\|\psi(t)\| = 1$, из этого условия однозначно определяется управление

$$u(t) = \psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - t) \\ \sin(\alpha - t) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Условие трансверсальности на множестве M_0 выполняется автоматически, так как множество M_0 состоит из одной точки $x_0 = 0$, а условие трансверсальности (7) на множестве M_1 имеет вид

$$-x_1(t_1) \psi_1(t_1) - x_2(t_1) \psi_2(t_1) = -2\pi \psi_1(t_1) + |\psi_2(t_1)|.$$

Следовательно, выполняются соотношения

$$x_2(t_1) = \begin{cases} 1, & \text{а́ñëè } \psi_2(t_1) < 0, \\ -1, & \text{а́ñëè } \psi_2(t_1) > 0, \\ [-1, 1], & \text{а́ñëè } \psi_2(t_1) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Найдем все пары $(u(t), x(t))$, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. Для этого найдем решения системы уравнений (29) с управлениями $u(t)$, заданными формулой (31), и начальным условием $x(0) = 0$. Запишем решение $x(t)$ по формуле Коши (9):

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} u(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha-s) \\ \sin(\alpha-s) \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) \cos(\alpha-s) + \sin(t-s) \sin(\alpha-s) \\ -\sin(t-s) \cos(\alpha-s) + \cos(t-s) \sin(\alpha-s) \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\alpha) \\ -\sin(t-\alpha) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \cos(t-\alpha) \\ -t \sin(t-\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, выражение (33) дает все решения, удовлетворяющие условию максимума и условию трансверсальности на множестве M_0 . При этом решения $x(t)$ зависят от начального вектора $\psi(0)$ сопряженной функции $\psi(t)$. Траектории $x(t)$, заданные выражением (33), образуют в фазовой плоскости семейство спиралей (рис.28). Поскольку $\|x(t)\| = t$, в момент времени t все решения $x(t)$ находятся на окружности радиуса t с центром в точке $x = 0$. Понятно, что эти решения впервые достигнут множества M_1 в момент времени $t = 2\pi$. Это будет траектория $x(t)$, изображенная на рис.28 жирной линией, она соответствует значению параметра $\alpha = 0$, то есть

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ -t \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Остается только проверить условие трансверсальности на множестве M_1 (32). Поскольку при $\alpha = 0$ из формулы (30) получаем сопряженную функцию $\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, то $\psi_2(2\pi) = 0$, и соотношение (32) выполняется.

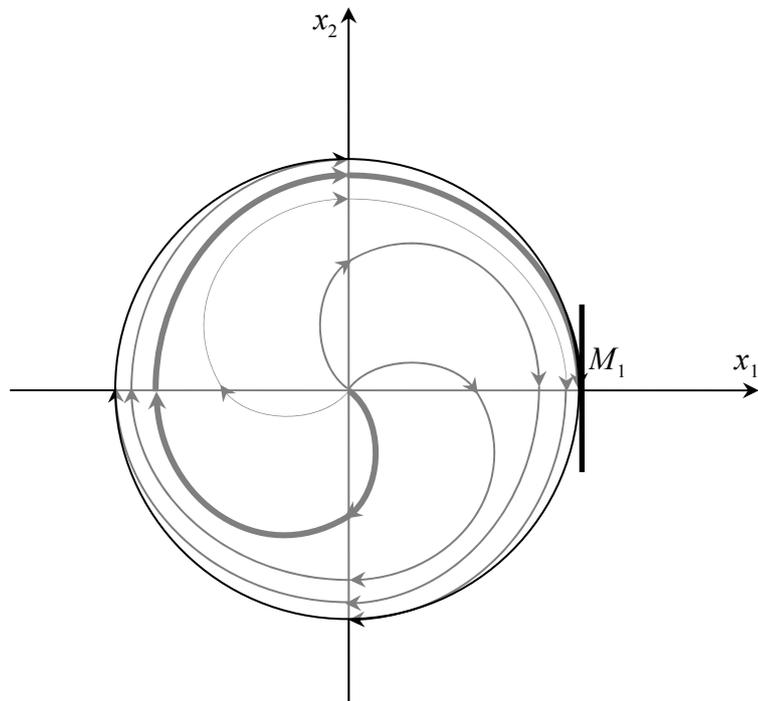


Рис.28

Таким образом, единственная пара

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ -t \sin t \end{pmatrix}$$

осуществляет переход из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[0, 2\pi]$ и удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Следовательно, эта пара $(u(t), x(t))$ оптимальна.

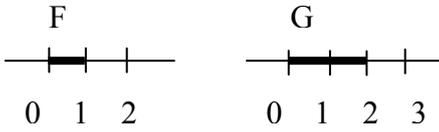
Ответ: $u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ – оптимальное управление, $x(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ -t \sin t \end{pmatrix}$ – соответствующая ему траектория, $t^* = 2\pi$ – наименьшее время перехода из множества M_0 на множество M_1 .

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

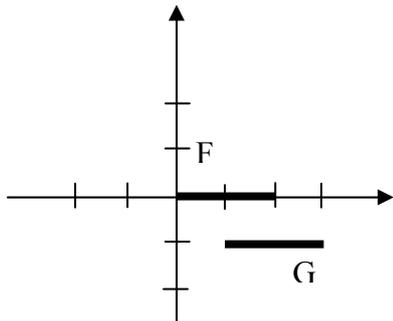
Вариант № 1

1) Найти сумму H множеств F и G , изображенных на рисунке:

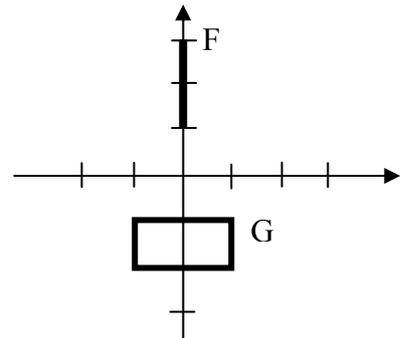
а)



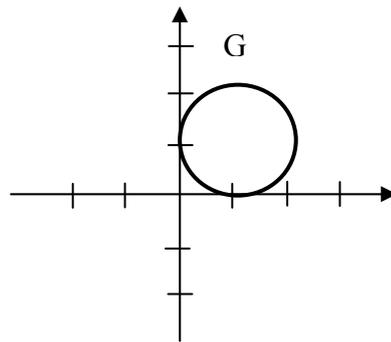
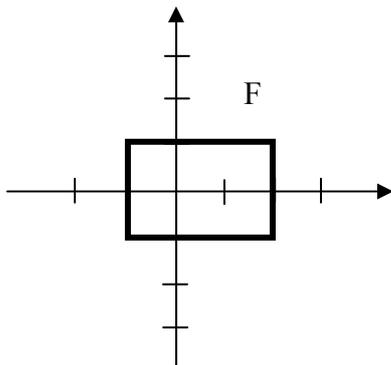
б)



в)



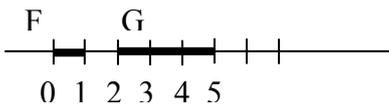
г)



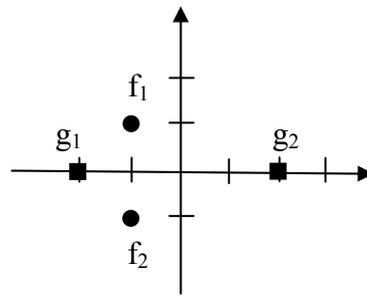
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.

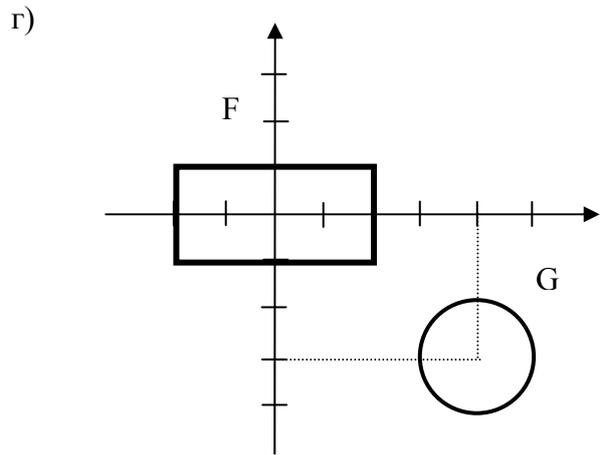
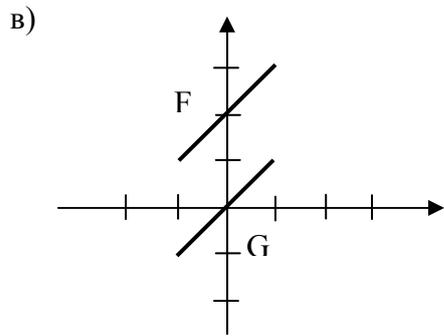
3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

а)



б)

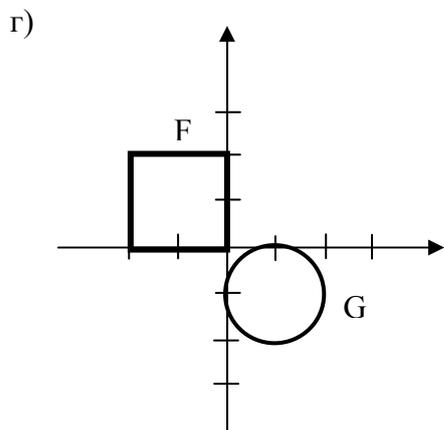
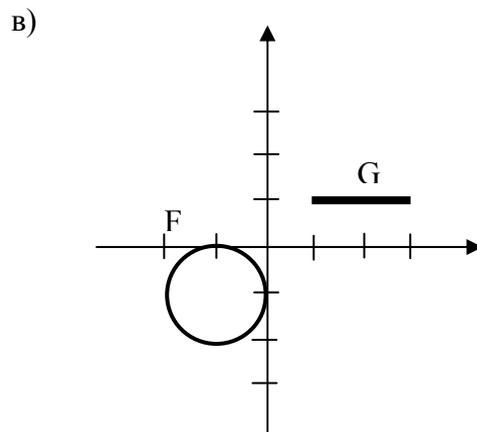
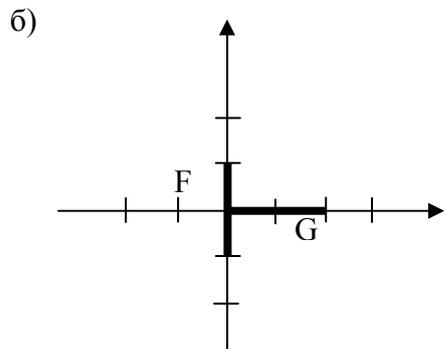




Вариант № 2

1) Найти сумму H множеств F и G , заданных аналитически или изображенных на рисунке:

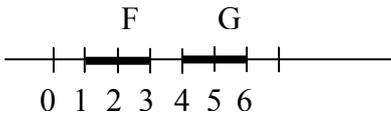
а) $F = \{2, 4\}$, $G = \{2, 4, 6\}$



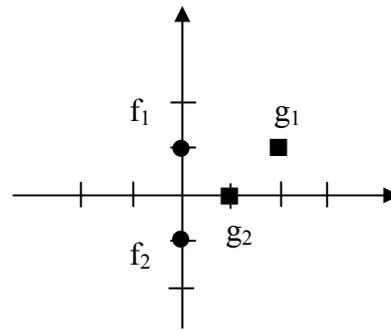
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -2$.

3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

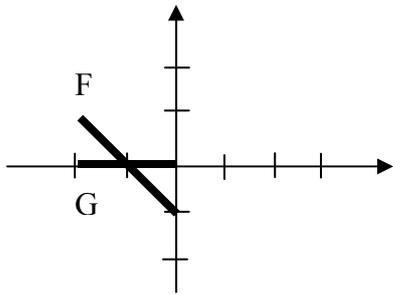
а)



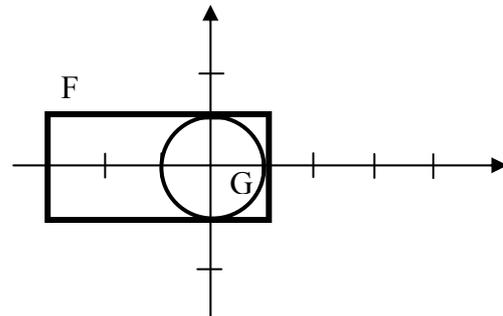
б)



в)



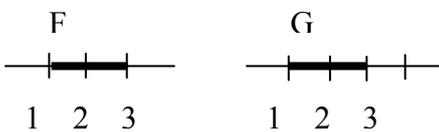
г)



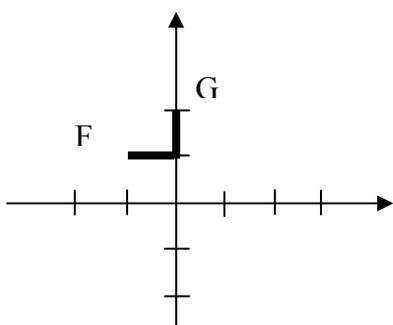
Вариант № 3

1) Найти сумму H множеств F и G , заданных аналитически или изображенных на рисунке:

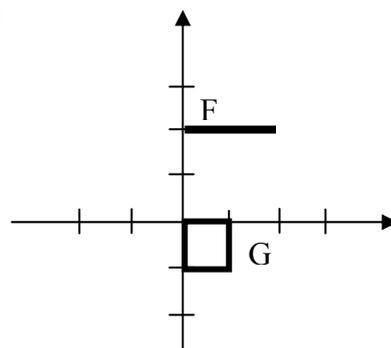
а)



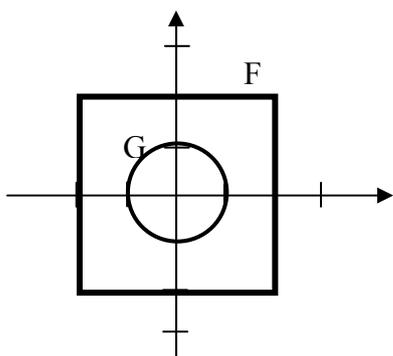
б)



в)



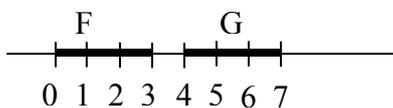
г)



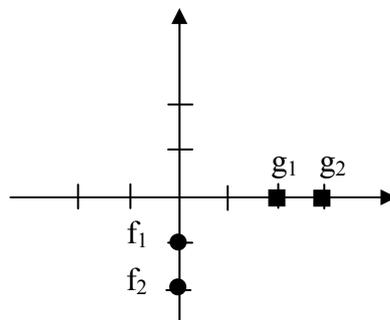
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.

3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

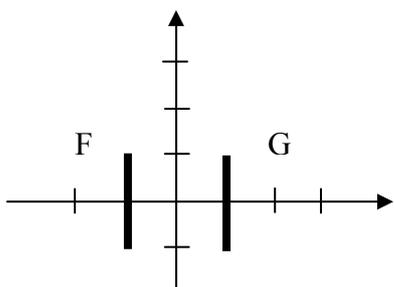
а)



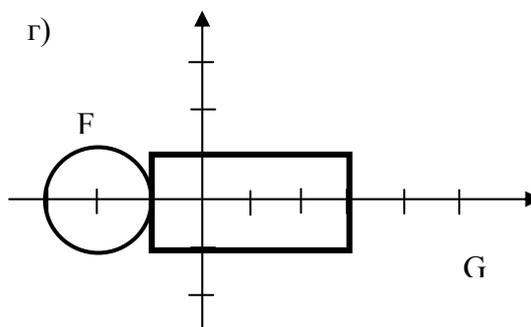
б)



в)



г)

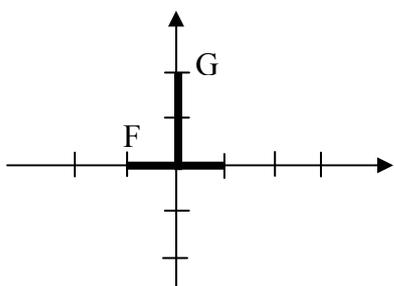


Вариант № 4

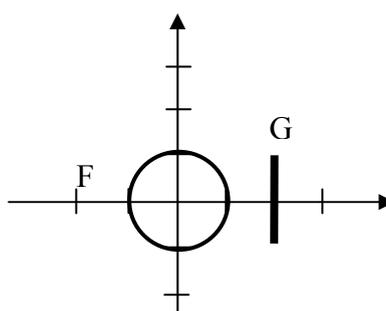
1) Найти сумму H множеств F и G , заданных аналитически или изображенных на рисунке:

а) $F = \{0, 1\}, G = \{2, 3, 4\}$

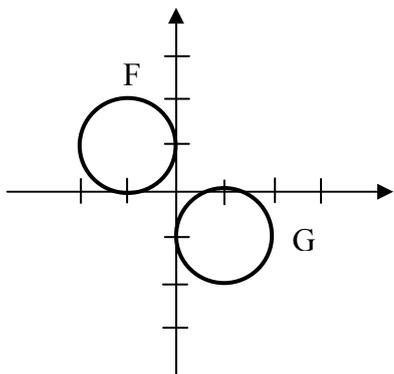
б)



в)

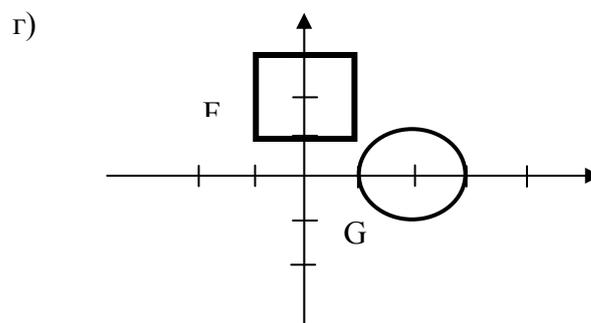
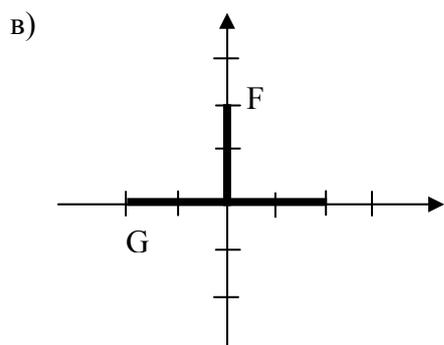
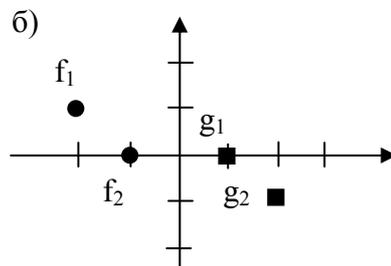
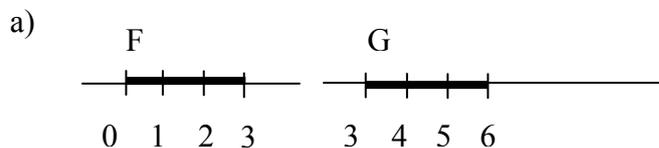


г)



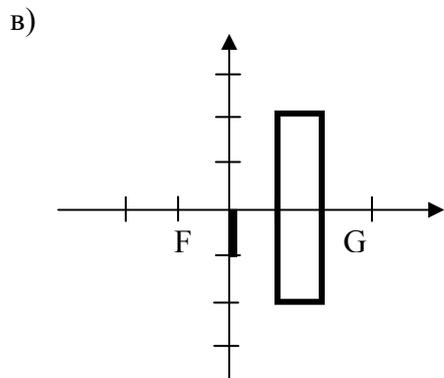
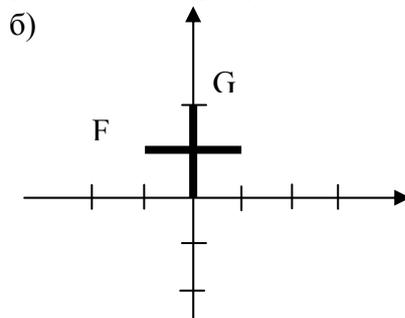
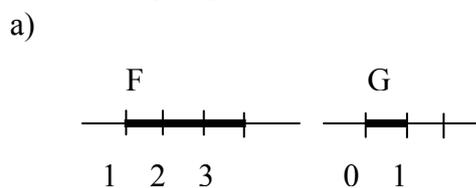
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -2$.

3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

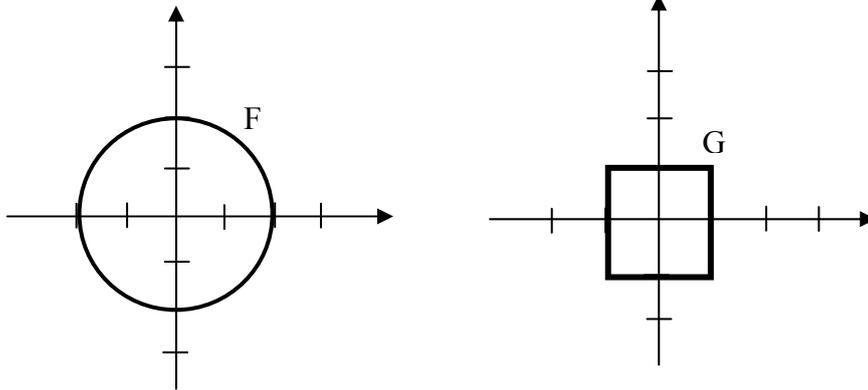


Вариант № 5

1) Найти сумму H множеств F и G , изображенных на рисунке:



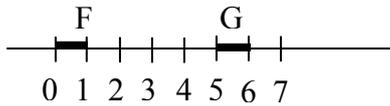
г)



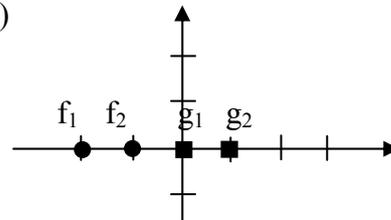
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.

3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

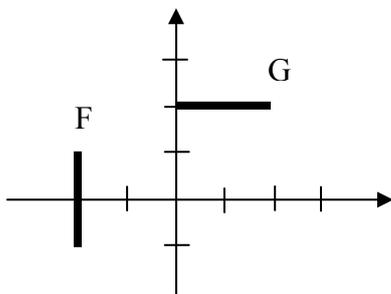
а)



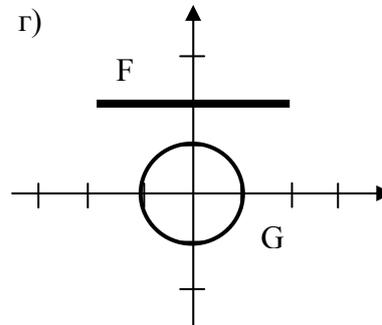
б)



в)



г)

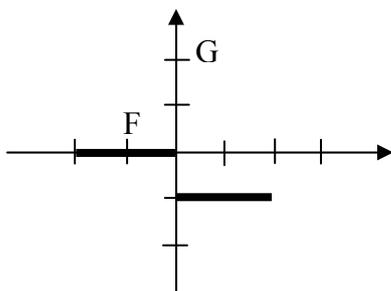


Вариант № 6

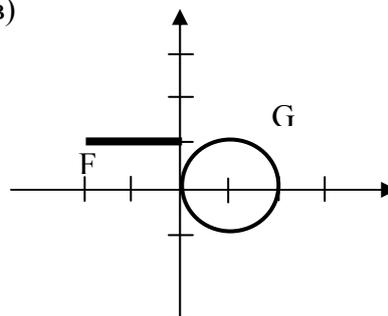
1) Найти сумму H множеств F и G , заданных аналитически или изображенных на рисунке:

а) $F = \{1, 2\}, G = \{1, 3, 5\}$

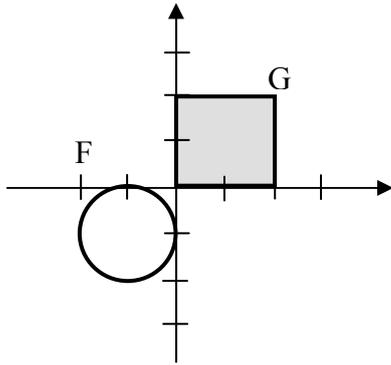
б)



в)



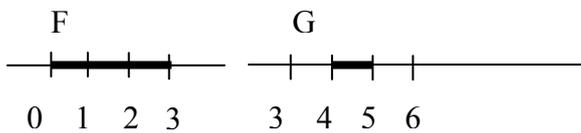
г)



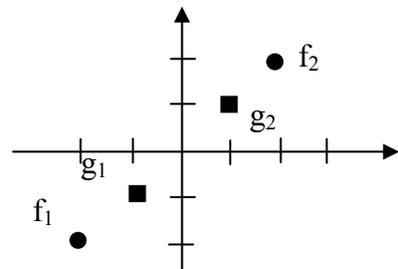
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -2$.

3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

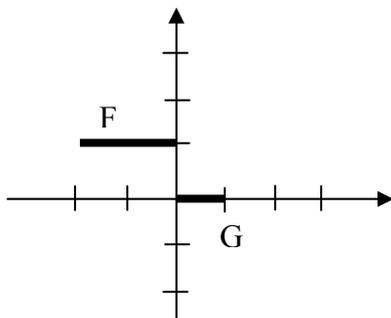
а)



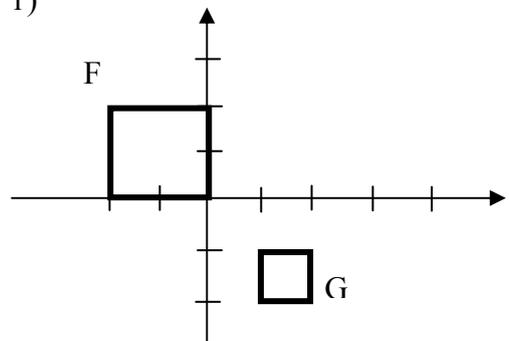
б)



в)



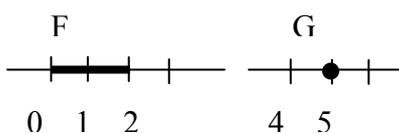
г)



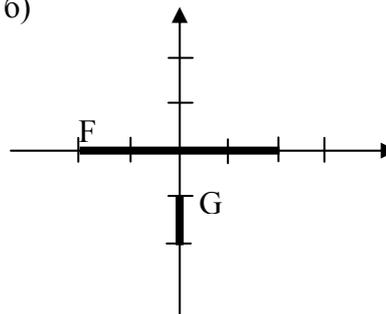
Вариант № 7

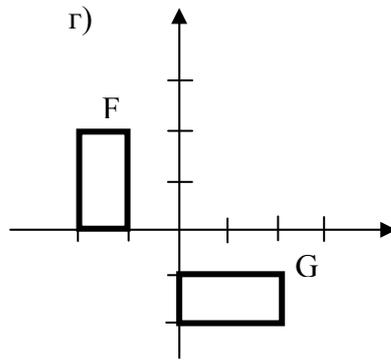
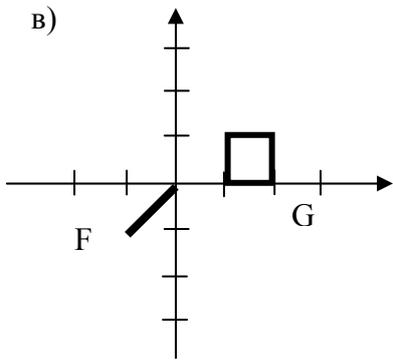
1) Найти сумму H множеств F и G , изображенных на рисунке:

а)



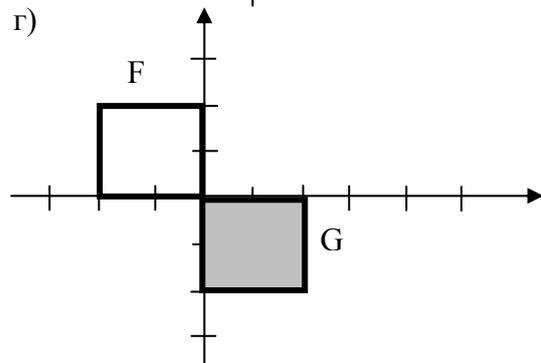
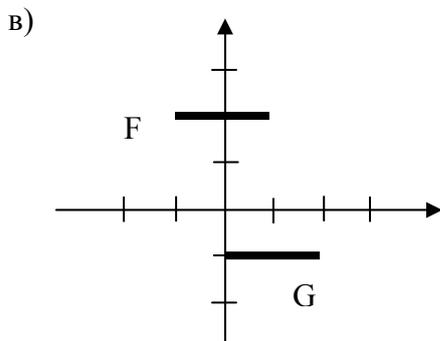
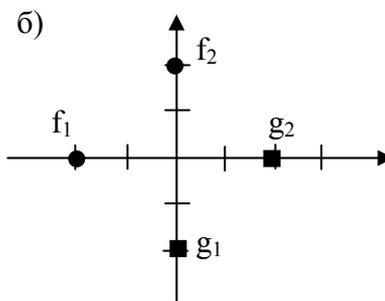
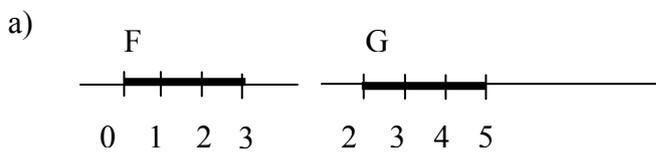
б)





2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.

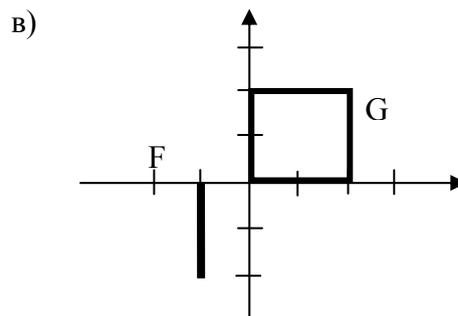
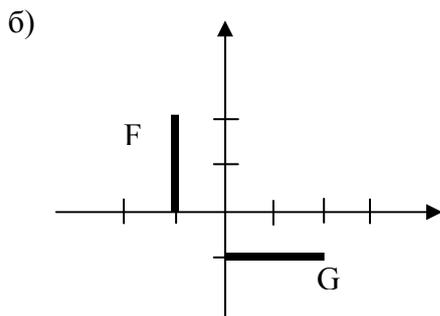
3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:



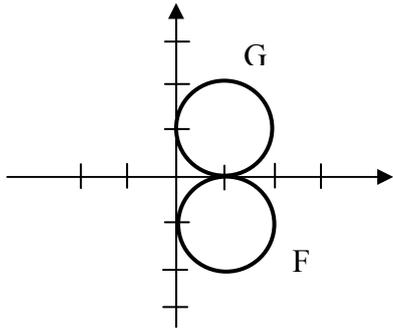
Вариант № 8

1) Найти сумму H множеств F и G , заданных аналитически или изображенных на рисунке:

а) $F = \{0, 5\}, G = \{5, 10, 15\}$



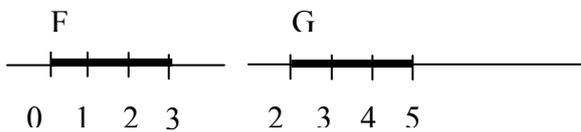
г)



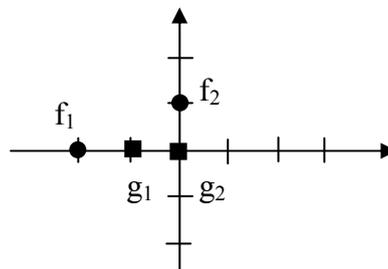
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -2$.

3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

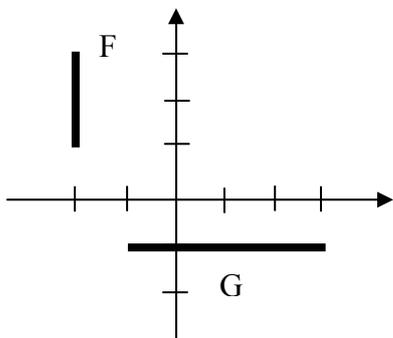
а)



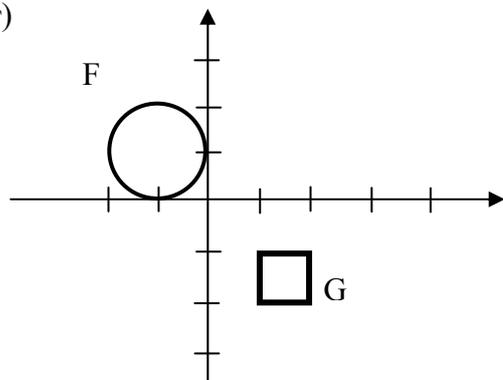
б)



в)



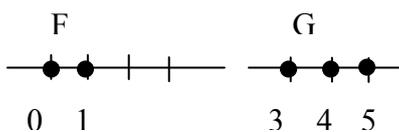
г)



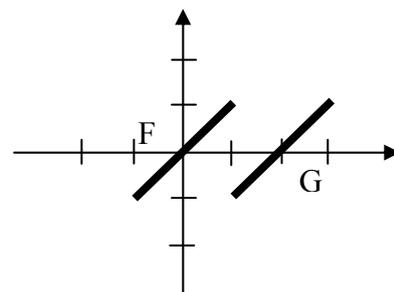
Вариант № 9

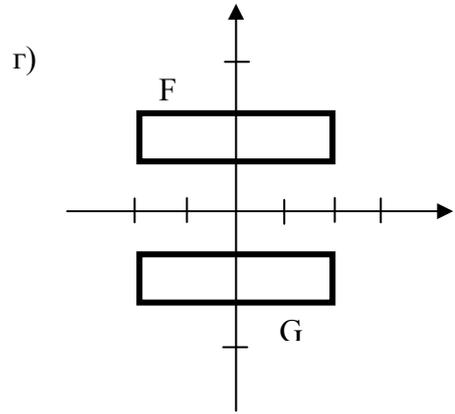
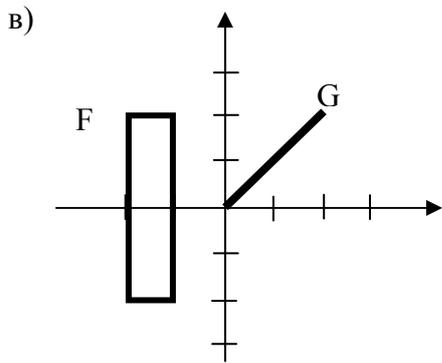
1) Найти сумму H множеств F и G , изображенных на рисунке:

а)



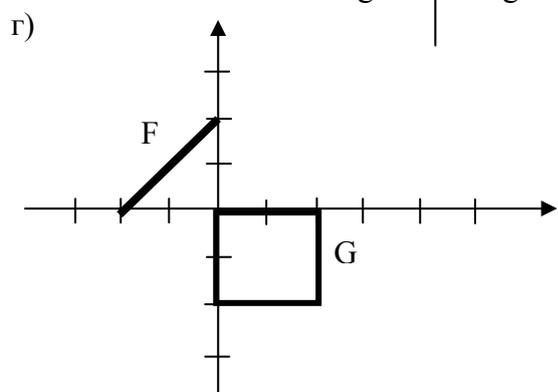
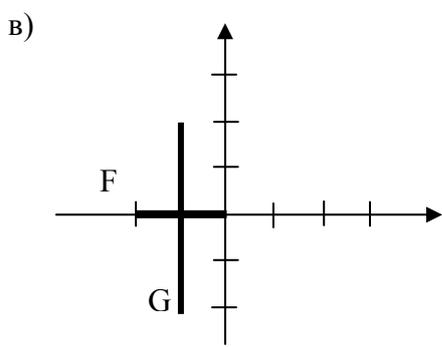
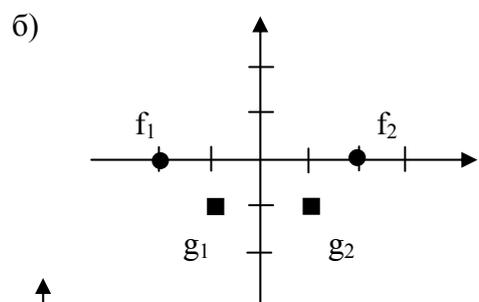
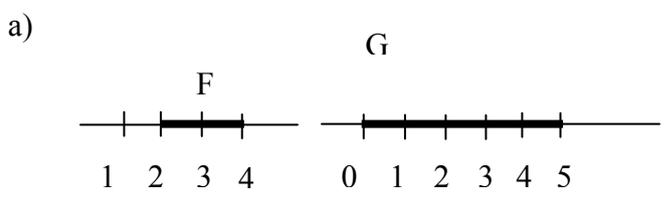
б)





2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.

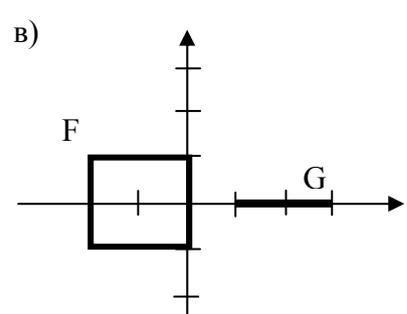
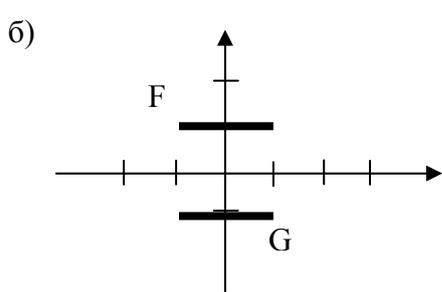
3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:



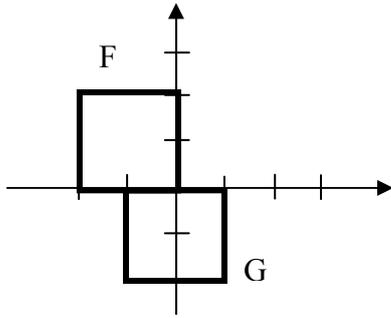
Вариант № 10

1) Найти сумму H множеств F и G , заданных аналитически или изображенных на рисунке:

а) $F = \{-2, 2\}, G = \{0, 2, 4\}$



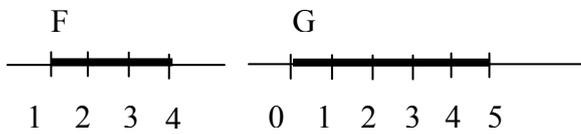
г)



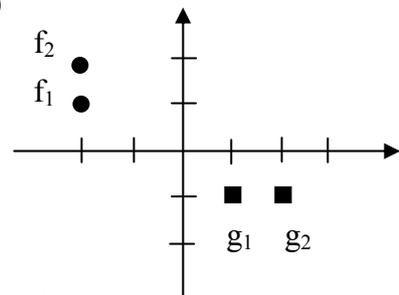
2) Найти множество $H = \alpha F + \beta G$, где множества F и G заданы в пункте 1, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -2$.

3) Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами F и G , изображенными на рисунке:

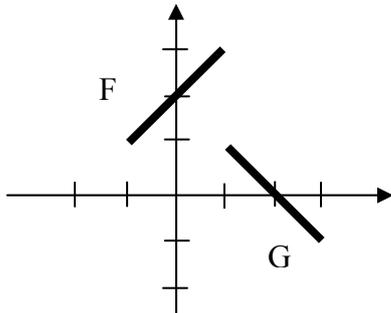
а)



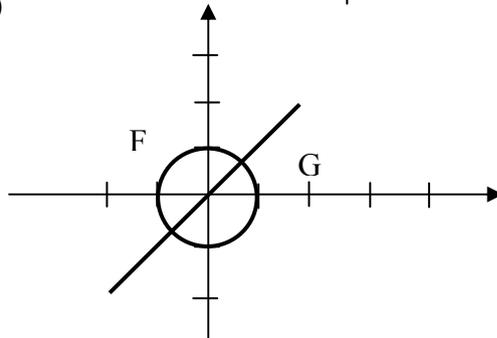
б)



в)



г)

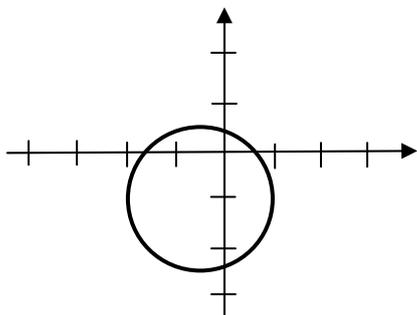


КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

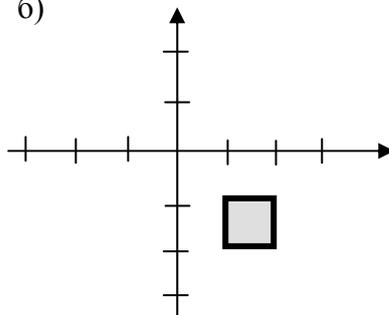
Вариант № 1

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

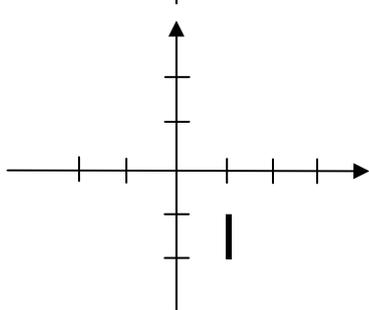
а)



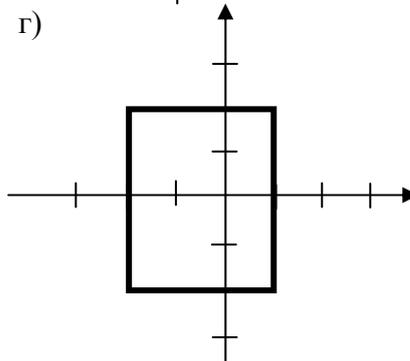
б)



в)

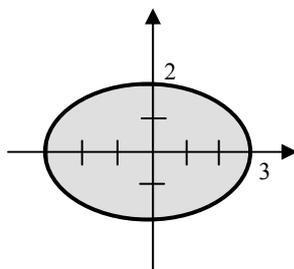


г)



2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.

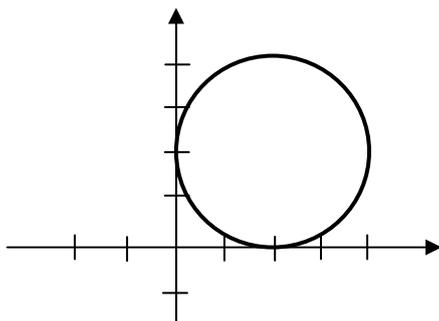
3) Найти опорную функцию множества



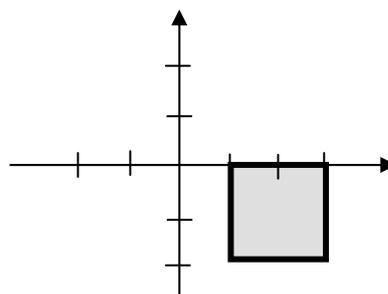
Вариант № 2

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

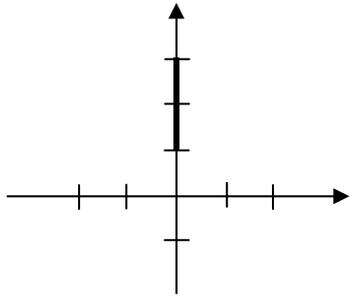
а)



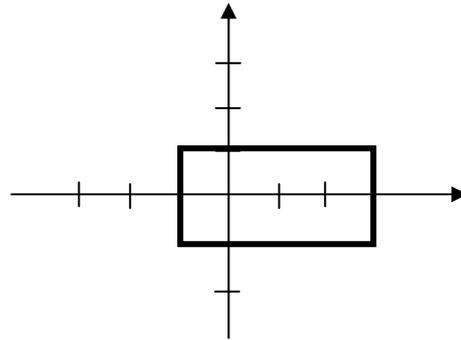
б)



в)



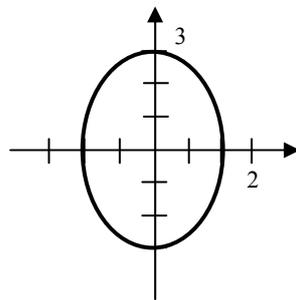
г)



2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в

пункте 1.

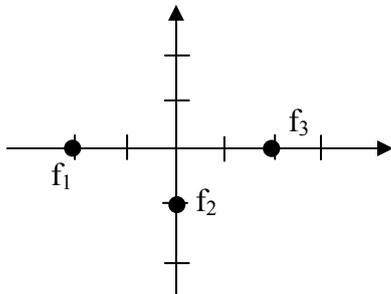
3) Найти опорную функцию множества



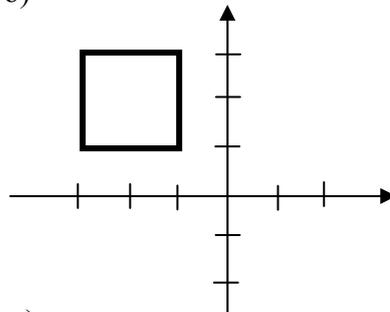
Вариант № 3

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

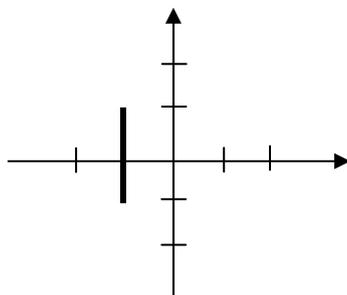
а)



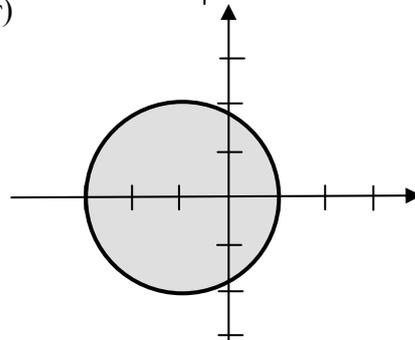
б)



в)



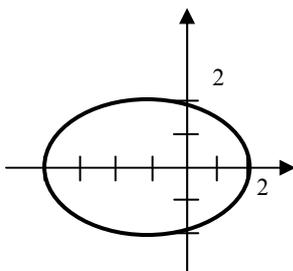
г)



2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в

пункте 1.

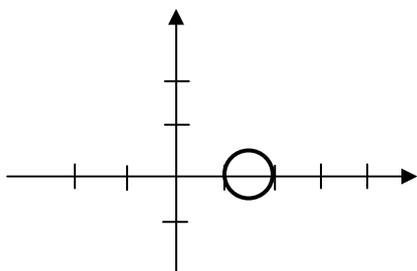
3) Найти опорную функцию множества



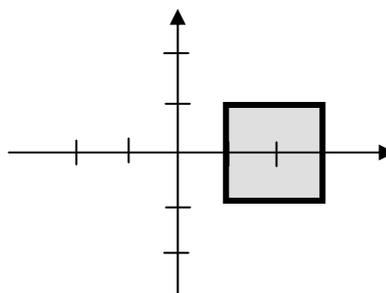
Вариант № 4

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

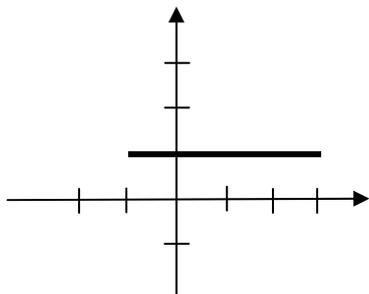
а)



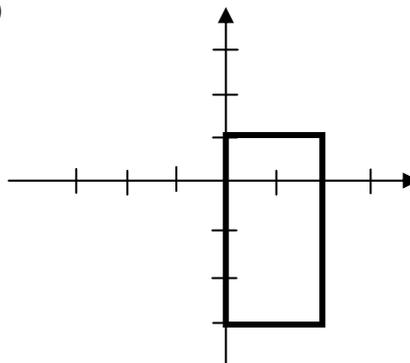
б)



в)

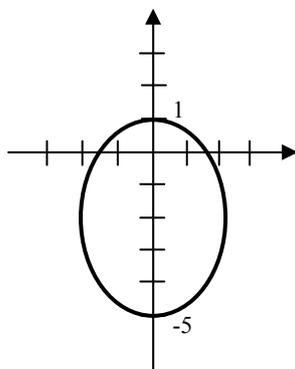


г)



2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.

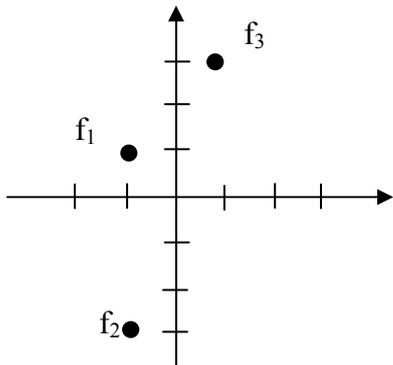
3) Найти опорную функцию множества



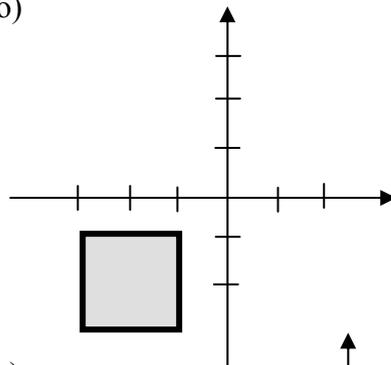
Вариант № 5

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

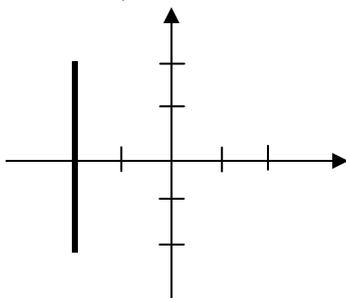
а)



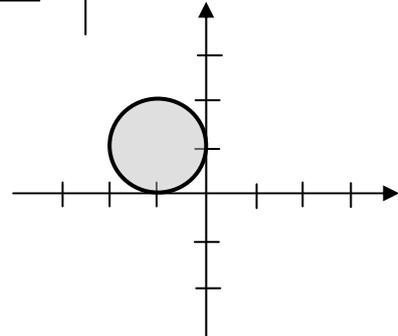
б)



в)

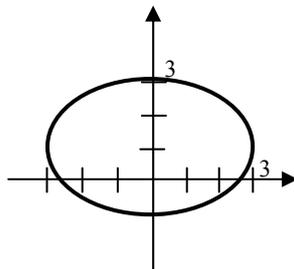


г)



2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.

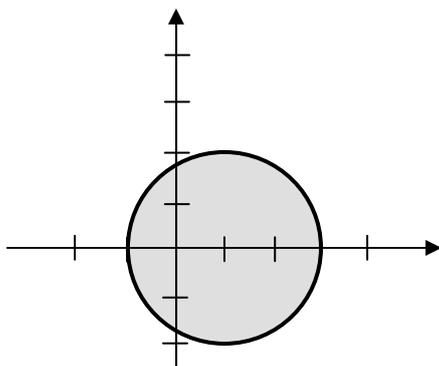
3) Найти опорную функцию множества



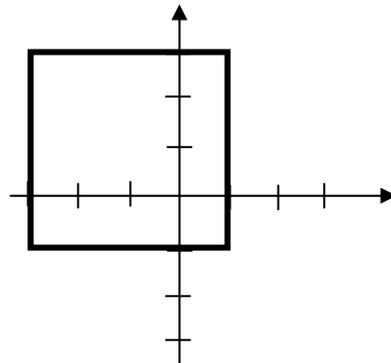
Вариант № 6

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

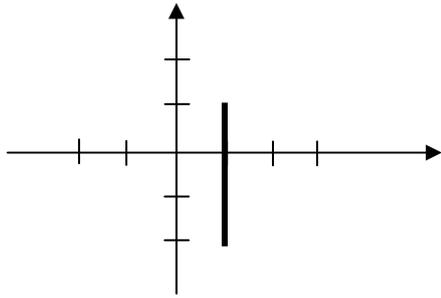
а)



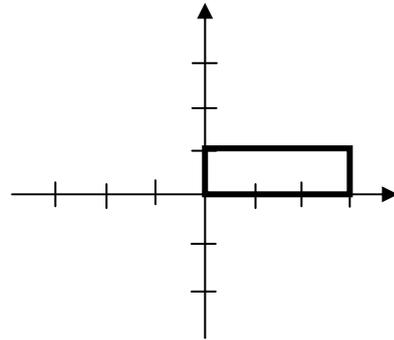
б)



в)

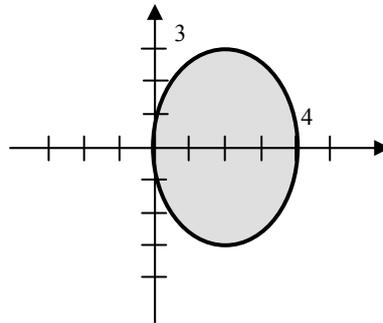


г)



2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.

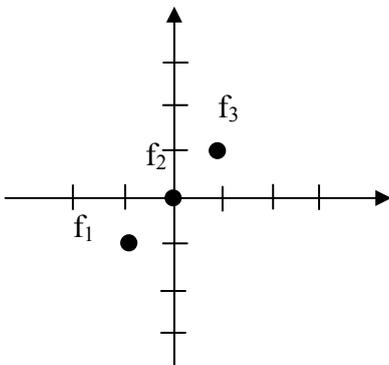
3) Найти опорную функцию множества



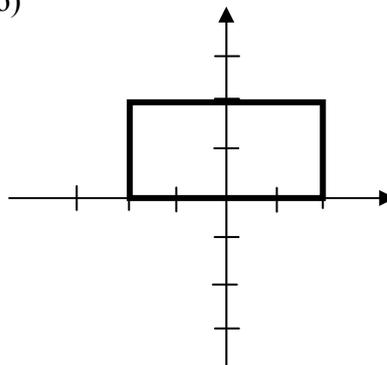
Вариант № 7

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

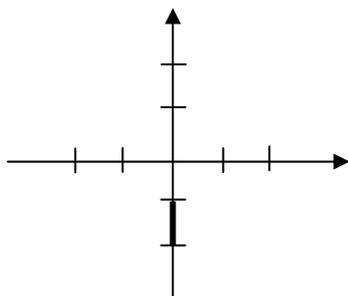
а)



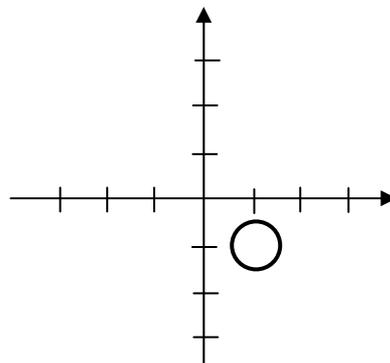
б)



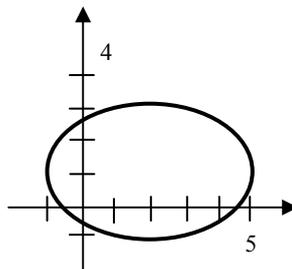
в)



г)



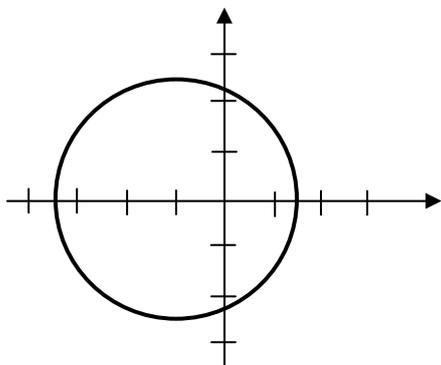
- 2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.
 3) Найти опорную функцию множества



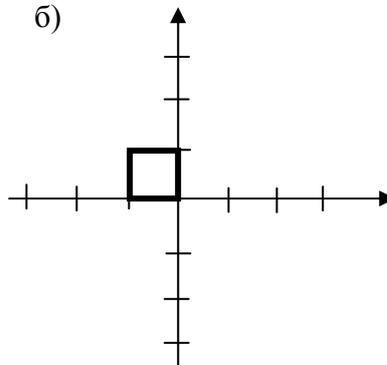
Вариант № 8

- 1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

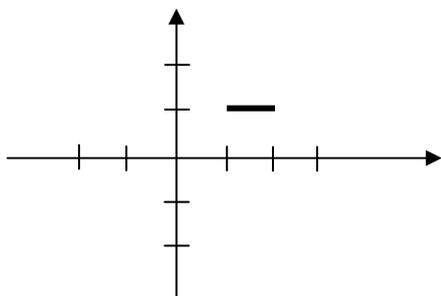
а)



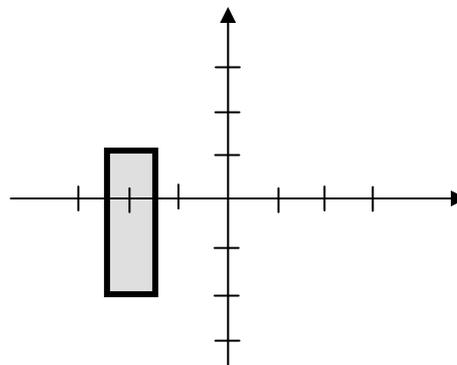
б)



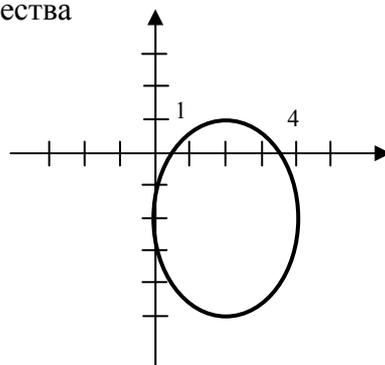
в)



г)



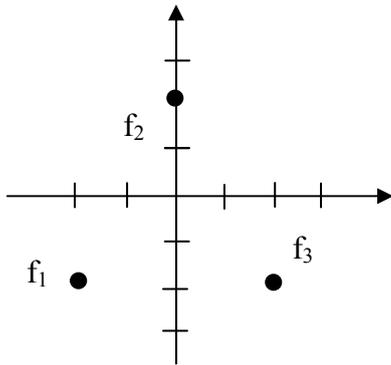
- 2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.
 3) Найти опорную функцию множества



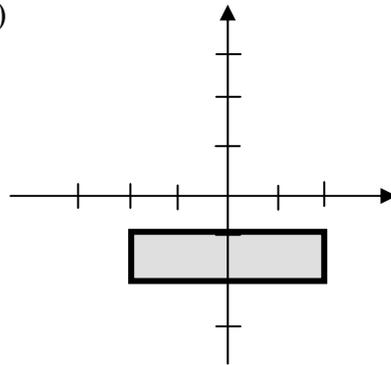
Вариант № 9

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

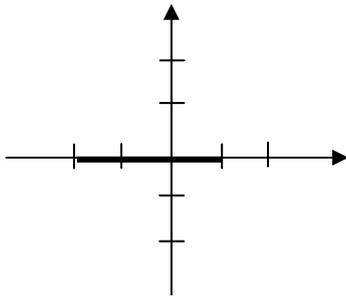
а)



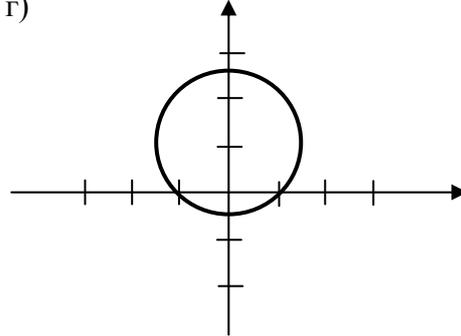
б)



в)

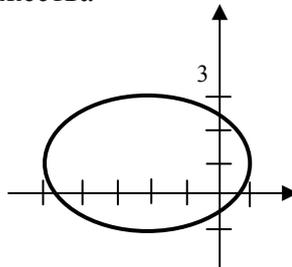


г)



2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.

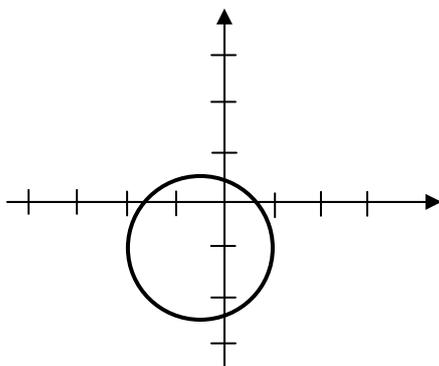
3) Найти опорную функцию множества



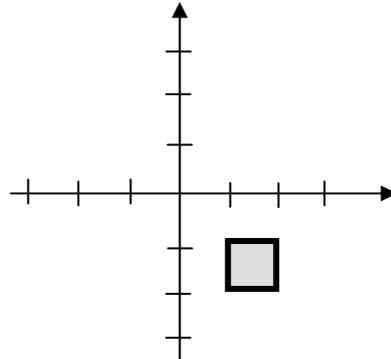
Вариант № 10

1) Найти опорные функции множеств, изображенных на рисунках:

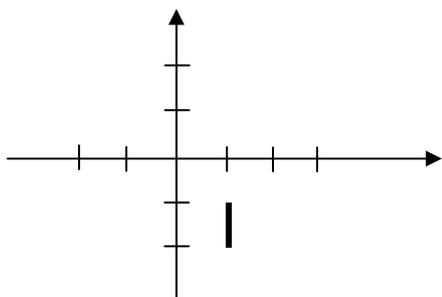
а)



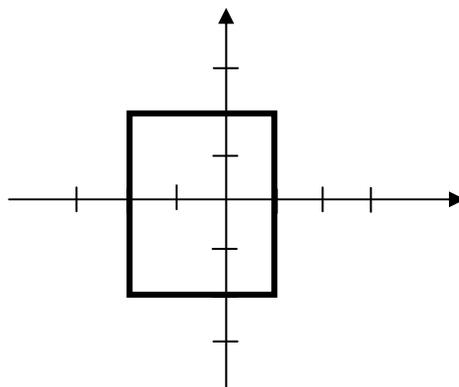
б)



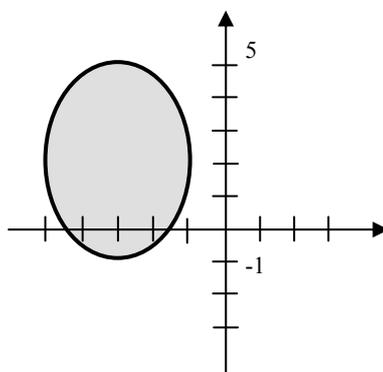
в)



г)



- 2) Найти опорные функции множеств MF , где $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, а множества F заданы в пункте 1.
- 3) Найти опорную функцию множества



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вычислить интеграл от многозначного отображения:

1. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\} + (1-t)S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \right] dt, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix};$
2. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_t \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix} + (2\pi - 2t)S_2 \begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix} + tK_1(0) \right] dt, \quad A(t) = t \begin{pmatrix} 2 \sin t & 2 \cos t \\ -2 \cos t & 2 \sin t \end{pmatrix};$
3. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_5 \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\} + (1-t)D \right] dt, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix},$
 $D = \{2 \leq x_1 \leq 5, -1 \leq x_2 \leq 2\};$
4. $\int_0^{2\pi} \left[\left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\} + (2\pi - 4t)S_3 \begin{pmatrix} t \\ -2 \end{pmatrix} + D(t) \right] dt,$
 $D(t) = \{-3t \leq x_1 \leq 5t, -2t \leq x_2 \leq 3t\};$
5. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_4 \begin{pmatrix} -\cos t \\ 5 \sin t \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\} + (3-t)S_3 \begin{pmatrix} 1+t \\ 3-t \end{pmatrix} \right] dt, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix};$
6. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_3 \begin{pmatrix} 6 \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\} + (2-3t)D \right] dt, \quad A(t) = -t \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$
 $D = \{2 \leq x_1 \leq 5, -1 \leq x_2 \leq 2\};$
7. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\} + (2-5t)D \right] dt, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin t & -3 \cos t \\ 3 \cos t & -3 \sin t \end{pmatrix},$
 $D = \{3 \leq x_1 \leq 5, 1 \leq x_2 \leq 5\};$
8. $\int_0^{2\pi} \left[2 \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\} + (3\pi - 4t)S_7 \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix} + 3D(t) \right] dt,$
 $D(t) = \{-2 \sin^2 t \leq x_1 \leq 6 \sin^2 t, -3 \sin^2 t \leq x_2 \leq \sin^2 t\};$
9. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + 3 \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\} + (7-t)S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] dt, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix};$
10. $\int_0^{2\pi} \left[A(t)S_8 \begin{pmatrix} 4 \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\} + (4-6t)D \right] dt, \quad A(t) = - \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$
 $D = \{-2 \leq x_1 \leq 5, -1 \leq x_2 \leq 2\}.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Задание: Решить линейные задачи быстрого действия:

Вариант № 1

- 1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -1 \leq u \leq 2, M_0 = \{-3 \leq x_1 \leq -2, x_2 = 0\}, M_1 = \{3 \leq x_1 \leq 4, x_2 = 2\};$
- 2) $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = 3x_1, -1 \leq u \leq 2, M_0 = \{1 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq -1\}, M_1 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, 1 \leq x_2 \leq 2\}.$

Вариант № 2

- 1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -1 \leq u \leq 2, M_0 = \{x_1 = -1, -3 \leq x_2 \leq -2\}, M_1 = \{x_1 = 0, 4 \leq x_2 \leq 5\};$
- 2) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -1 \leq u \leq 1, M_0 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = -1\}, M_1 = \{1 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq -1\}.$

Вариант № 3

- 1) $\dot{x}_1 = 2u, \dot{x}_2 = x_1, -2 \leq u \leq 1, M_0 = \{2 \leq x_1 \leq 3, x_2 = 0\}, M_1 = \{x_1 = 0, 3 \leq x_2 \leq 4\};$
- 2) $\dot{x}_1 = 2x_2, \dot{x}_2 = u, -1 \leq u \leq 2, M_0 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = 0\}, M_1 = \{2 \leq x_1 \leq 3, -1 \leq x_2 \leq 1\}.$

Вариант № 4

- 1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -1 \leq u \leq 1, M_0 = \{x_1 = 1, -2 \leq x_2 \leq 1\}; M_1 = \{2 \leq x_1 \leq 4, x_2 = 0\};$
- 2) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, 0 \leq u \leq 1, M_0 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, -1 \leq x_2 \leq 0\}, M_1 = \{3 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$

Вариант № 5

- 1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -\frac{1}{2} \leq u \leq 1, M_0 = \{-3 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 0\}; M_1 = \{5 \leq x_1 \leq 6, x_2 = 2\};$
- 2) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, 0 \leq u \leq 2, M_0 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, -1 \leq x_2 \leq 0\}, M_1 = \{4 \leq x_1 \leq 5, 3 \leq x_2 \leq 4\}.$

Вариант № 6

- 1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -2 \leq u \leq 3, M_0 = \{2 \leq x_1 \leq 5, x_2 = 4\}; M_1 = \{x_1 = 0, -3 \leq x_2 \leq 3\};$
- 2) $\dot{x}_1 = 2x_2, \dot{x}_2 = u, -1 \leq u \leq 2, M_0 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = 0\}, M_1 = \{2 \leq x_1 \leq 3, -1 \leq x_2 \leq 1\}.$

Вариант № 7

- 1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -5 \leq u \leq 1, M_0 = \{-5 \leq x_1 \leq 3, x_2 = -1\}; M_1 = \{1 \leq x_1 \leq 6, x_2 = 0\};$
- 2) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, -1 \leq u \leq 1, M_0 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = -1\}, M_1 = \{1 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq -1\}.$

Вариант № 8

- 1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, |u| \leq 1, M_0 = \{x_1 = 2, -1 \leq x_2 \leq 1\}, M_1 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, x_2 = 0\};$
2) $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = 3x_1, -1 \leq u \leq 1, M_0 = \{1 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq -1\}, M_1 = \{0 \leq x_1 \leq 1, 5 \leq x_2 \leq 6\}.$

Вариант № 9

- 1) $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = x_1, |u| \leq 1, M_0 = \{x_1 = 0, -3 \leq x_2 \leq -1\}, M_1 = \{-1 \leq x_1 \leq -1, x_2 = 2\};$
2) $\dot{x}_1 = \frac{1}{2}x_2, \dot{x}_2 = u, -2 \leq u \leq 0, M_0 = \{-3 \leq x_1 \leq -1, -1 \leq x_2 \leq 1\}, M_1 = \{1 \leq x_1 \leq 3, -2 \leq x_2 \leq -1\}.$

Вариант № 10

- 1) $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1, -1 \leq u \leq 2, M_0 = \{-1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = -1\}, M_1 = \{-2 \leq x_1 \leq 0, x_2 = 2\};$
2) $\dot{x}_1 = 4x_2, \dot{x}_2 = u, -2 \leq u \leq 1, M_0 = \{-2 \leq x_1 \leq -1, 0 \leq x_2 \leq 1\}, M_1 = \{1 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 0\}.$